INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
FÍSICA Y ESTADÍSTICA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y NEGOCIOS

Apuntes de apoyo al estudiante: Mecánica

Fondo Concursable de Generación de Material académico

Autores
Dr. Marcelo Ipinza Calderón
Mg. Rodrigo Vargas Herrera

Fondo Concursable de Generación de Material Académico

ISBN:

Primera edición: Julio 2024

Imagen de portada: Shutterstock

Autores: Marcelo Ipinza Calderón y Rodrigo Vargas Herrera

Edición
Camila Muñoz Parietti

Coordinación
Ricardo Monge Rogel

Universidad de Las Américas
Dirección: Avda. Manuel Montt 948, Providencia, Santiago de Chile. www.udla.cl

Índice

SOBRE LOS AUTORES

Marcelo Ipinza C.

Marcelo Ipinza C. es egresado de la Universidad de Concepción (UdeC), donde obtuvo los grados de Licenciado, Magíster y Doctor en Física. Además, posee un segundo doctorado en Física otorgado por el Politecnico di Torino (POLITO) en Torino, Italia. También realizó un postdoctorado en física bajo el patrocinio de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso en colaboración con el Politecnico di Torino (2019-2022). En el transcurso de su carrera ha sido profesor de Física de Universidad de Las Américas, Universidad del Desarrollo y Pontifica Universidad Católica de Chile. Desde 2022, es coordinador académico del Instituto de Matemática, Física y Estadística (IMFE) de la Facultad de Ingeniería y Negocios de UDLA en su área de física.

Rodrigo Vargas H.

Rodrigo Vargas H. es egresado de la Universidad de Santiago de Chile (USACH), donde obtuvo los grados de Licenciado y Magíster en Física Aplicada, así como el título de Profesor de Estado en Física y Matemática. A lo largo de su trayectoria, ha desarrollado investigaciones en el Laboratorio de Ultrasonidos de la USACH y ha impartido clases de Física en Universidad de Las Américas y en la Universidad de Santiago. Actualmente, forma parte del cuerpo académico del Instituto de Matemática, Física y Estadística (IMFE), perteneciente a la Facultad de Ingeniería y Negocios de la UDLA.

INTRODUCCIÓN

Este apunte de clases se enfoca en la descripción de diversos fenómenos de la física en su área específica de Mecánica Newtoniana. Su formato simple y claro brinda al estudiante una excelente herramienta complementaria al libro guía de la asignatura, la que permitirá observar de manera directa los detalles que frecuentemente se esbozan de manera altamente técnica en el aula o en el texto general de física definido para la asignatura.

Cada capítulo aborda un tema específico de la mecánica de tal manera que se canaliza el estudio a través de un camino directo hacia la comprensión de estos contenidos. Parte desde una fase de contextualización a una breve introducción formal al contenido, para proceder posteriormente a la descripción de la operatoria involucrada en la obtención de los distintos parámetros físicos de tipo escalar y vectorial, según corresponda. Además, se proponen ejercicios resueltos en detalle y, finalmente, se invita a resolver, de manera congruente con este apunte, los ejercicios mediante el uso del contenido físico y matemático que en las páginas anteriores se expuso. En estos, se brinda la respuesta con el fin de entregar una inmediata retroalimentación y permite al estudiantado la autoevaluación del nivel de comprensión alcanzado, sin necesidad de recurrir a otras fuentes externas.

Los contenidos que contempla este apunte inician en una fase de nivelación que incluye el estudio de las magnitudes físicas y sus unidades de medida y, además, de la operatoria vectorial; importante conjunto de técnicas para resolver los distintos ejercicios de la mecánica Newtoniana, Cinemática de la partícula en una y dos dimensiones, las tres leyes de Newton de la Dinámica y sus consecuentes cantidades del movimiento, tales como la cantidad de movimiento lineal, el impulso y la energía de colisiones. El balance de energía en sistemas físicos cerrados también se explica de manera sencilla en torno al teorema del trabajo y la energía, para que de este modo quien use este apunte relacione la evolución de la energía mecánica con los cambios experimentados por la energía potencial y la energía cinética.

Finalmente, se desemboca en la generalización del modelamiento de los objetos como partícula puntual a un modelo que considera sus dimensiones longitudinales, superficiales o volumétricas, como así también sus diferentes formas, limitando el tipo de movimientos en ese punto al movimiento de roto-traslación. Esto deja fuera del estudio cualquier tipo de deformación mecánica y, por lo tanto, recibe el nombre de modelo mecánico del cuerpo rígido.

En el término de este documento, se ofrece un enlace web que permitirá explorar los resultados de aprendizajes que fueron reforzados para cada estudiante. Gracias a su utilización en cursos de mecánica, también será fuente directa de retroalimentación que permitirá eventualmente editar y mejorar textos, ejercicios, imágenes, etc., con la finalidad principal de dotar progresivamente de mayor coherencia el contenido brindado y las emergentes necesidades de la comunidad estudiantil.

Expresamos nuestros agradecimientos a la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, que financia el presente proyecto, al Instituto de Matemática Física y Estadística (IMFE) y a la Facultad de Ingeniería y Negocios (FINE), afiliación del equipo de autores, y a nuestra institución, Universidad de Las Américas por promover, como parte de sus principios fundamentales, la constante mejora en la entrega de herramientas de aprendizaje, en sus contenidos específicos y sus metodologías.

Marcelo Ipinza y Rodrigo Vargas

CAPÍTULO 1: MAGNITUDES Y UNIDADES

Resumen

En esta unidad, se revisan la importancia de las magnitudes fundamentales y derivadas dentro del ámbito de la física y su transversalidad sobre todas las ramas de la ciencia y tecnología. Se abordan los criterios de redondeo, cifras significativas y cómo expresar grandes o pequeñas cantidades en notación científica. En muchas ocasiones, se requiere tratar cantidades físicas en unidades específicas. En este sentido, se aplica una técnica para la transformación de unidades de un sistema a otro.

1.1. Magnitudes fundamentales y derivadas

Las magnitudes fundamentales dan cuenta de cantidades físicas medibles. Son independientes entre sí y son medibles directamente. Así, en el campo de la física mecánica tenemos las siguientes: Masa (M), Longitud (L) y Tiempo (T). Existen otras que definen la corriente eléctrica, temperatura, intensidad luminosa y cantidad de una sustancia.

A partir de combinaciones operacionales de las magnitudes fundamentales, aparecen las magnitudes derivadas. Por ejemplo:

$$\text{Velocidad: } [v] = \frac{L}{T} \qquad \text{Aceleración: } [a] = \frac{L}{T^2} \qquad \text{Fuerza: } [F] = \frac{ML}{T^2} \qquad (1.1)$$

1.1.1. Sistemas de unidades

Un sistema de unidades asigna medidas estándar a las magnitudes fundamentales como lo son longitud, masa, tiempo y a las derivadas como velocidad, aceleración, fuerza, presión, etc.

Los sistemas más comunes son el Sistema Internacional (Tabla 1) y el Sistema Inglés o Anglosajón (Tabla 2).

Tabla 1. Sistema internacional

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente Eléctrica	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	Cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

En la Tabla 2, se destacan las magnitudes relevantes en física mecánica que son masa, longitud y tiempo.

Tabla 2. Sistema inglés

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	pie	m
Masa	libra	kg
Tiempo	segundo	s

En cada uno de los sistemas, se definen unidades múltiplos o submúltiplos, por ejemplo, en el Sistema Internacional (S.I), 1 Km corresponde a 1000 m y, en el sistema inglés, 1 pie corresponde a 12 pulgadas.

1.1.2. Notación científica: redondeo

Una cantidad muy grande o pequeña frecuentemente resulta más conveniente expresarla en notación científica, que consiste en escribirla en términos de potencias de 10. Así, una cantidad en notación científica se escribe como $a\,x10^{b}$.

En la notación anterior, la mantisa **a** es menor que 9 y **b** es un número entero positivo o negativo.

Ejemplo 1.1: Exprese la cantidad 2.345.000 en notación científica. Solución: $2{,}345x10^{6}$

Ejemplo 1.2: Exprese la cantidad 0,000567 en notación científica. Solución: $5{,}67x10^{-4}$

En los ejemplos anteriores, también puede presentarse la cantidad en una manera más simple, que dependerá de la situación particular en la que se presentan las cantidades, por ejemplo, la precisión instrumental, los errores involucrados al obtener las cantidades u otro. Estas situaciones nos llevan a considerar las reglas de redondeo de un número en relación con el número de cifras significativas en que deba ser expresado.

1.2. Cifras significativas

En mediciones tales como, por ejemplo, la medida de la temperatura corporal, el número de cifras significativas es de tres (Figura 1). No tiene sentido tomar más cifras significativas puesto que quedan sujetas a variaciones aleatorias.

Figura 1. Medida de la temperatura

Fuente: Gomolach, 9 de octubre de 2018, Shutterstock.

Reglas sobre cifras significativas

- Los ceros a la izquierda de una coma decimal no son cifras significativas.

Ejemplo 1.3: La cantidad 0,00304 tiene 3 cifras significativas.

- Los ceros al final de una cantidad no son cifras significativas a menos que estén después de una coma decimal.

Ejemplo 1.4: La cantidad 25.000 tiene 2 cifras significativas.

Las cantidades 345,002 lo mismo que 345,000 tienen 6 cifras significativas.

1.2.1 Regla de redondeo

Para redondear una cantidad a un número de cifras significativas en particular, debe de tenerse en cuenta si el dígito que sigue a la última cifra significativa es mayor o igual que 5. En tal caso, esta sube su valor y, en caso contrario, no cambia.

Ejemplo 1.5: Redondear la cantidad 546.789,25 a tres cifras significativas.

Solución: Puesto que el 4° dígito es mayor que 5, entonces el tercer dígito 6 sube a 7. Esto es: 547.

Ejemplo 1.6: Redondear la cantidad 0,003046 a dos cifras significativas.

Solución: Puesto que el quinto dígito es menor que 5, entonces el quinto no cambia. Esto es: 0,0030.

Ejemplo 1.7: Exprese la cantidad 1.345.872 en notación científica con tres cifras significativas.

Solución: En notación científica la cantidad queda como $1{,}345872\ x\ 10^6$

y a tres cifras significativas $1{,}34\ x\ 10^6$.

1.3. Transformación de unidades

Transformar unidades es de mucha relevancia dentro del ámbito tecnológico e industrial y un error puede traer consecuencias desastrosas. Esto ocurrió en 1999, cuando la NASA[1] envió un satélite meteorológico a orbitar Marte. Sin embargo, nunca llegó a destino, puesto que desde la base en la Tierra, para el control de la trayectoria, enviaban a los sistemas de navegación una cantidad de fuerza medida en Newton, información que el satélite interpretaba en libras. Al no concordar la cantidad de fuerza por las medidas configuradas, el satélite se desvió y perdió.

Frecuentemente, es necesario realizar cambios en las unidades de una cantidad física, ya sea para efectos de realizar cálculos dimensionalmente coherentes o presentar un resultado en un sistema de unidad en particular.

Ejemplo 1.8: Un vehículo se mueve con rapidez constante de 100 Km/hora. Determine la distancia en metros que recorre en 1 minuto.

Solución: En el problema, se presenta un móvil que recorre 100 km cada hora. Como 1 km tiene 1000 metros y una hora tiene 60 minutos, entonces la distancia recorrida en metros es $100 \cdot 1000\ m = 100.000\ m$ en 60 minutos.

Luego haciendo una regla de tres: $\frac{100.000\ m}{x\ m} = \frac{60\ minutos}{1\ minuto} \rightarrow x = \frac{100.000 \cdot 1}{60} = 166{,}67\ m$

La distancia en metros que el vehículo recorre en 1 minuto es de 166,67 metros.

[1] En inglés, la sigla NASA significa *National Aeronautics and Space Administration*, que en español se traduce como Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio. Es el organismo norteamericano encargado de esa área.

Para transformar una cantidad expresada en un sistema en particular a otro, multiplicamos sucesivamente por factores que transforman cada unidad de la cantidad a las requeridas en el nuevo sistema.

Ejemplo 1.9: Exprese la cantidad $312\ \frac{Kg}{cm^2 \cdot seg}$ en $\frac{gramos}{m^2 \cdot minuto}$

Solución

$$312\ \frac{Kg}{cm^2 \cdot seg} \cdot \left(\frac{1000\ gramos}{1\ Kg}\right) \cdot \left(\frac{10.000\ cm^2}{1\ m^2}\right) \cdot \left(\frac{60\ segundos}{1\ minuto}\right) \qquad (1.2)$$

$$312\ \frac{\cancel{Kg}}{\cancel{cm^2} \cdot \cancel{seg}} \cdot \left(\frac{1000\ gramos}{1\ \cancel{Kg}}\right) \cdot \left(\frac{10.000\ \cancel{cm^2}}{1\ m^2}\right) \cdot \left(\frac{60\ \cancel{segundos}}{1\ minuto}\right)$$

$$312 \cdot \frac{1000 \cdot 10.000 \cdot 60}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 1{,}87x10^{11}\ \frac{gramos}{m^2 \cdot minuto} \qquad (1.3)$$

Lo que hemos hecho en este ejemplo es expresar una cantidad física que involucra masa, longitud y tiempo, sin realizar modificaciones en el fenómeno físico en sí mismo. Solo cambia el número porque hemos considerado otras escalas de medición en los instrumentos que la están midiendo y por ello nos brinda otro valor, en tales escalas, pero del mismo fenómeno en estudio.

Actividades

1. Transforme las siguientes cantidades a las unidades que se indican y exprese el resultado con dos cifras significativas.

$a)\quad 3{,}2x10^{-2}\ \frac{gramos}{m^2 seg} \rightarrow \frac{Kg}{cm^2\ minuto} \qquad b)\ 6.528\ \frac{m^3}{hora} \rightarrow \frac{litros}{minuto}$

2. Una persona camina 5 metros en 3 segundos. ¿Qué distancia recorre suponiendo que camina durante una semana?
3. Un paralelepípedo de dimensiones 20x30x10 cm tiene una densidad de 6598 Kg/m^3. Con esta información, encuentre su masa expresada en gramos.

CAPÍTULO 2: VECTORES Y SUS OPERACIONES

Resumen

En esta unidad se define un vector y algunas de sus propiedades, su representación polar y cartesiana. Se aborda el producto punto o escalar entre dos vectores y una aplicación como es la de obtener el ángulo que forman dos vectores.

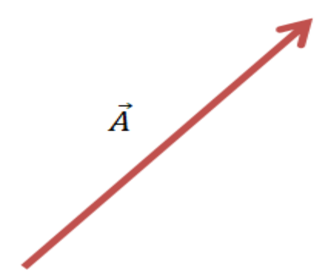
2.1. Cantidades escalares y vectoriales

Una cantidad física puede ser de tipo escalar o vectorial. Una cantidad escalar es aquella que queda completamente determinada con un número y una unidad, por ejemplo, masa, densidad, superficie, etc.

Por otro lado, una cantidad vectorial queda definida completamente con una magnitud o número y una dirección y sentido. Ejemplo de cantidad vectorial son desplazamiento, velocidad, fuerza, aceleración, etc.

Un vector se representa gráficamente con una flecha que indica su dirección y sentido. La magnitud del vector es proporcional al largo de la flecha.

Figura 2.1



2.1.1 Algunas características y propiedades de los vectores

A. **Son invariantes frente a traslaciones puras.** No cambia su magnitud, dirección ni sentido. En ese sentido, no pierde su identidad.

Figura 2.2

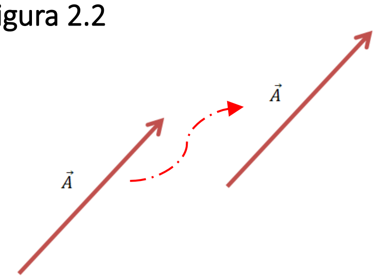
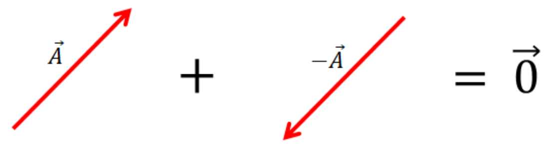


Figura 2.3

B. **Existencia del elemento aditivo inverso.** A todo vector $\vec{A}$ le corresponde un único vector $-\vec{A}$, de modo que la suma de ambos vectores da como resultado el vector nulo (este último es el elemento identidad con la operación $\pm$).



$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$$

C. **Multiplicación de un escalar por un vector.** Al realizar el producto entre un escalar (número) y un vector cambia la magnitud del vector (Figura 2.4) y, eventualmente, su sentido si el escalar es negativo (Figura 2.5).

Figura 2.4

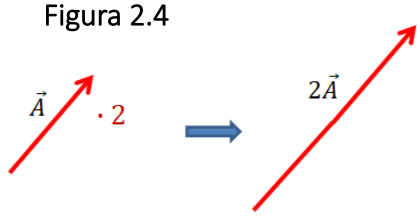


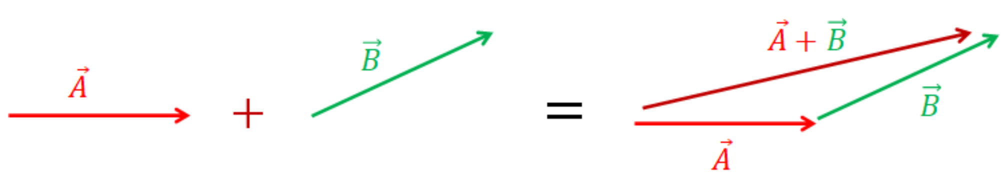
Figura 2.5

2.1.2 Suma gráfica de vectores

Existen dos formas equivalentes para sumar dos vectores:

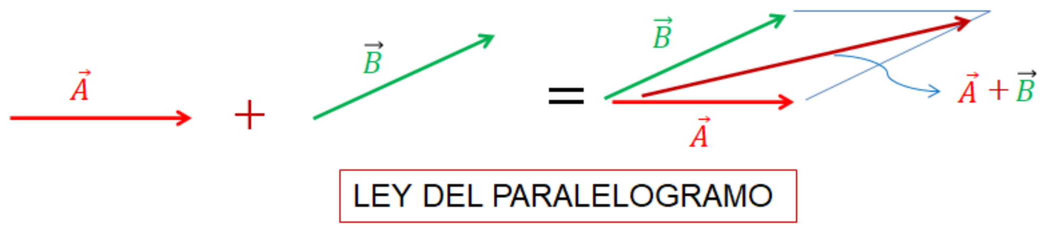
A. **Colocar uno a continuación de otro.** El vector resultante es el que parte del comienzo del primero y llega hasta el extremo final del segundo vector.

Figura 2.6



B. **Ley del paralelogramo.** Se colocan los dos vectores partiendo del mismo origen. El vector resultante corresponde al definido por la diagonal mayor del paralelogramo generado por ambos.

Figura 2.7



Como ejemplo del primer método, puede considerarse el vector desplazamiento: la suma de dos o más desplazamientos da como resultado el vector que parte del principio del primer vector desplazamiento y termina en el extremo final del último.

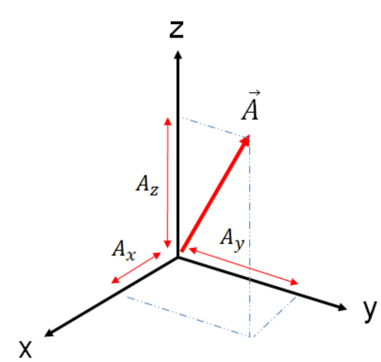
2.1.3 Representación analítica de un vector

Un vector puede ser definido en diferentes sistemas de coordenadas, tales como un sistema cartesiano, rectangular, polar, cilíndrico y esférico. Para efectos de los objetivos propuestos en la asignatura, se considerará el sistema cartesiano y polar.

Representación cartesiana

Un vector $\vec{A}$ queda completamente definido dados sus componentes A_x, A_y y A_z que corresponden a las proyecciones del vector sobre sus respectivos ejes.

Figura 2.8



Así, un vector puede ser descrito de la forma:

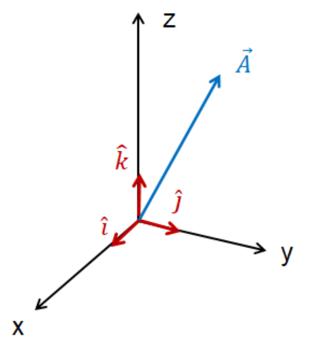
$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

Un vector también puede ser representado en término de los vectores unitarios cartesianos.

Figura 2.9

Vectores unitarios cartesianos

En general un vector unitario tiene magnitud 1 y su función es la de indicar una dirección. Es así como los vectores unitarios cartesianos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ indican respectivamente las direcciones x, y, z. Así, un vector $\overrightarrow{A}$ puede ser expresado como

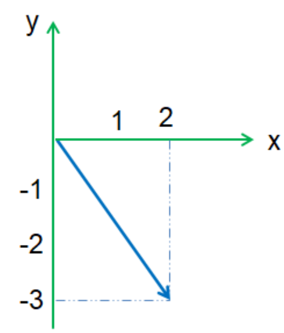


$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

Figura 2.10

Ejemplo 2.1

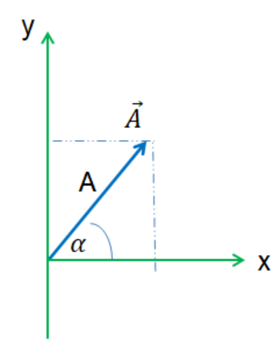
El vector $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ es representado en el plano cartesiano (Figura 2.10):



2.1.4 Representación polar

Figura 2.11

En dos dimensiones, un vector $\vec{A}$ también queda completamente definido conocidas su magnitud A, y su dirección y sentido definido por el ángulo α que forma el vector con alguno de los ejes cartesianos.

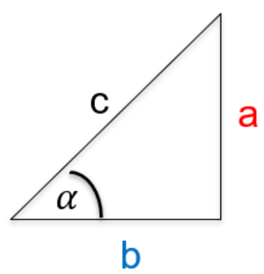


2.1.5 Relación entre coordenadas cartesianas y polares

Un vector puede ser representado en un sistema cartesiano o polar. La relación existente entre las representaciones se da utilizando el teorema de Pitágoras y algunas funciones trigonométricas aplicadas sobre un triángulo rectángulo.

Figura 2.12

Teorema de Pitágoras



$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

Funciones trigonométricas

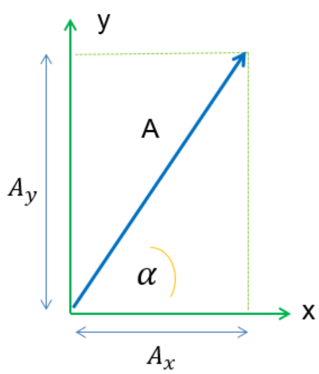
$$seno(\alpha)=\frac{a}{c} \rightarrow a=c\cdot seno(\alpha)$$

$$\cos(\alpha)=\frac{b}{c} \rightarrow b=c\cdot coseno(\alpha)$$

$$tg(\alpha)=\frac{a}{b}$$

Las relaciones anteriores nos permiten relacionar las componentes de un vector en representación polar.

Figura 2.13



$$\vec{A}=A_x\,\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}$$

$$con\ A_x=A\cos(\alpha)\ \text{y}\ \ A_y=A\ sen\ \alpha$$

$$\text{tg}\ \alpha=\frac{A_y}{A_x}$$

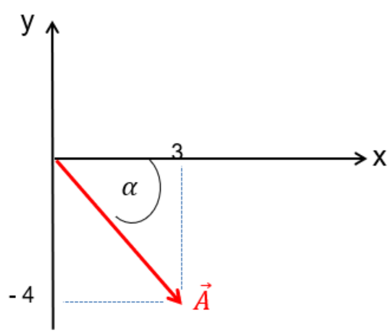
$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$$

Cabe notar que la componente que se encuentra adyacente al ángulo se define en función del coseno y la no adyacente, en la función seno.

Ejemplo 2.1: Dado el vector $\vec{A}=3\hat{\imath}-4\hat{\jmath}$. exprese el vector en coordenadas polares.

Solución: El vector en coordenadas polares queda determinado con su magnitud A y dirección definida por el ángulo α. (Figura 2.14).

Figura 2.14



$$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \longrightarrow A = 5$$

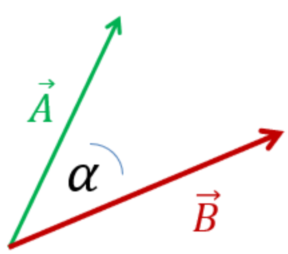
$$\text{tg } \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{-4}{3} \longrightarrow \alpha = -53°$$

2.1.6 Producto punto (escalar)

El producto punto es una operación entre dos vectores que dan como resultado un escalar (número).

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman entre sí un ángulo α. (Figura 2.15):

Figura 2.15

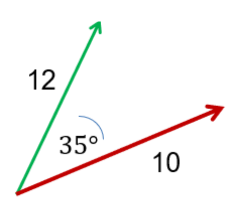


Operacionalmente el producto punto viene dado por la expresión (2.1).

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\alpha)} \qquad (2.1)$$

Ejemplo: Encuentre el producto punto entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que muestra la siguiente figura:

Figura 2.16



Solución

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 10 \cdot 12\ COS(35) = 98{,}3$$

Otra forma en la cual el producto punto puede ser calculado es en términos de las componentes cartesianas de los vectores.

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y} \qquad (2.2)$$

Las expresiones (2.1) y (2.2) son equivalentes de modo que igualando se obtiene:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\alpha) = A_xB_x + A_yB_y \Rightarrow \boxed{cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}} \qquad (2.3)$$

Esta última expresión permite calcular el ángulo que forman dos vectores entre sí.

Ejemplo 2.2: Encuentre el ángulo que forman entre sí los vectores:

$\vec{A}$= *i - 2j +3k* *y* $\vec{B}$= *-2i+ 5j*

Solución

$$COS(\alpha) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{(1,-2,\ 3)\cdot(-2,5,0)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+5^2+0}} = \frac{1\cdot-2\ -\ 2\cdot 5}{\sqrt{14\cdot 29}} = \frac{-12}{\sqrt{588}} \qquad / \ COS^{-1}$$

$$\alpha = 119{,}7°$$

Actividades

1. Dado el vector $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, encuentre:
   a) La magnitud del vector.
   b) Su representación en coordenadas polares.

2. La magnitud y ángulo que forma un vector $\vec{C}$ son 10 y 30° con el eje x respectivamente.
   Represente el vector en coordenadas cartesianas.

3. Sean los vectores $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. Encuentre el ángulo que forman entre si ambos vectores.

CAPÍTULO 3: APLICACIÓN DE OPERACIONES VECTORIALES

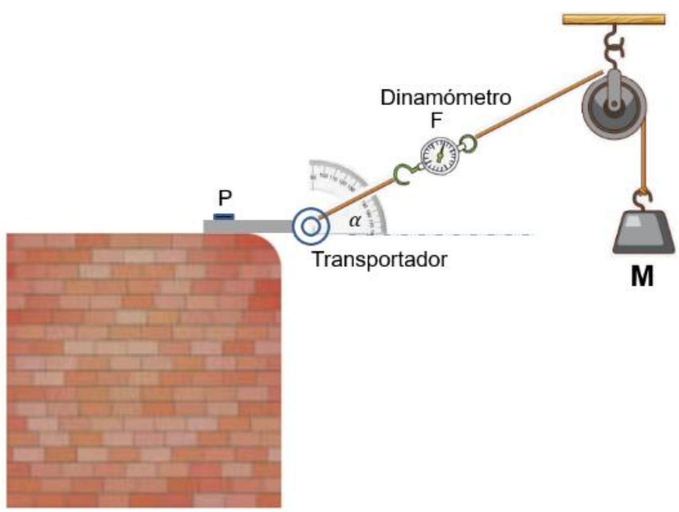
Resumen

En esta unidad se destaca la importancia de expresar un vector relacionado a una cantidad física en coordenadas cartesianas y polares. Se abordan aplicaciones prácticas de vectores, en particular sobre la suma de vectores frente a problemas relacionados con física mecánica.

3.1. Justificación sobre representación de un vector

La importancia que tienen las coordenadas polares radica en el hecho de que en la práctica algunas cantidades vectoriales se obtienen de forma experimental en coordenadas polares. Por ejemplo, una carga M aplica una fuerza de magnitud F transmitida por una cuerda sobre la estructura de fijación en P y el ángulo α es medido con un transportador o algún otro método.

Figura 3.1



Se hace necesario conocer la robustez del sistema de fijación en cuanto al esfuerzo máximo de carga que puede soportar, para lo cual debe determinarse las componentes de la fuerza en x e y.

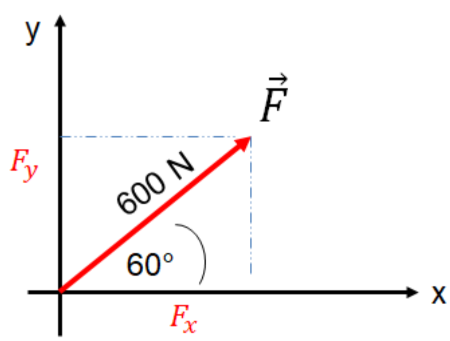
(3.1)

$$\vec{F} = F_x\,\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$$

Ejemplo 3.1: Considere el sistema mostrado en la Figura 3.2. Si la medición del dinamómetro marca una fuerza de 600 N y el transportador mide 60°. Encuentre las componentes de la fuerza sobre el sistema de fijación.

Solución: La fuerza viene dada en coordenadas polares. La representamos en un sistema cartesiano.

Figura 3.2



La componente Fx es adyacente al ángulo de modo que

$$F_x = 600 \cdot cos\ cos\ (60)\ = 300{,}00\ Newton$$

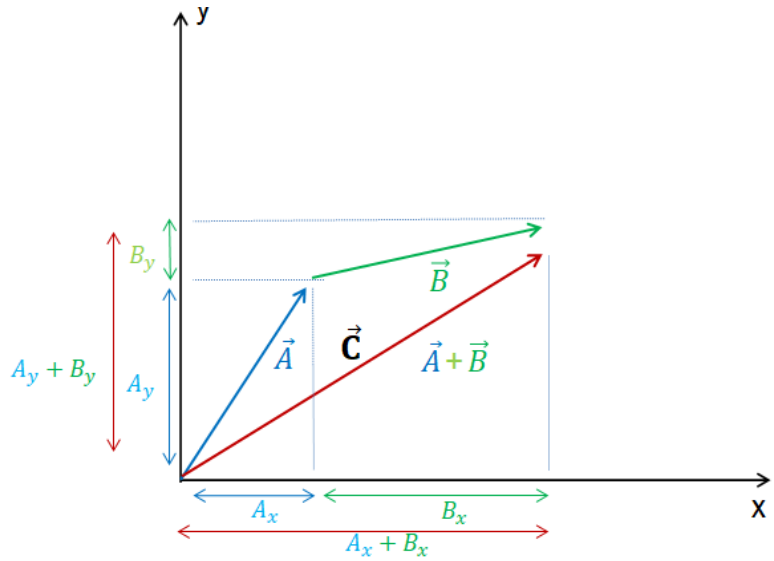
Y la componente Fy no es adyacente, de modo que

$$F_y = 600 \cdot (60)\ = 529{,}62\ Newton$$

3.2. Suma analítica de vectores

Sean dos vectores $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}$. Para encontrar el vector $\vec{C}$ correspondiente a la suma $\vec{A} + \vec{B}$ representamos en el plano ambos vectores puestos uno a continuación del otro, e identificando sus respectivas componentes correspondientes a las proyecciones sobre cada eje.

Figura 3.3



De la Figura 3.3, se tiene que la componente C_x del vector suma viene dado por

$$C_x = A_x + B_x$$

La componente C_y viene dado por

$$C_y = A_y + B_y \text{Por lo que } \vec{C} = (A_x + B_x)\,\hat{\imath} + (A_y + B_y)\,\hat{\jmath} \qquad (3.2)$$

En general, en el espacio de tres dimensiones, la expresión (3.2) se hace extensiva a

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\,\hat{\imath} + (A_y + B_y)\,\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\,\hat{\jmath}$$

Ejemplo 3.2: Sean los vectores

$$\vec{A} = -5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$$

Encuentre los vectores definidos por las siguientes operaciones:

a) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

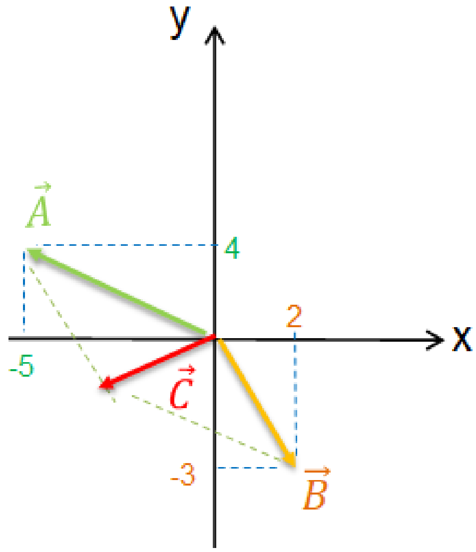
b) $\vec{D} = 2\vec{A} - \overrightarrow{3B}$

Solución: Usando la expresión (3.2)

a) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (-5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) + (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) = (-5 + 2)\hat{\imath} + (4 - 3)\hat{\imath} = -3\hat{\imath} - \hat{\jmath}$

Se puede representar gráficamente por ejemplo colocando ambos vectores partiendo desde el origen y usando la ley del paralelogramo (Figura 3.4).

Figura 3.4



b) $\vec{D} = 2\vec{A} - 3\vec{B} = 2 \cdot (-5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) - 3 \cdot (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$

$$= (-10\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}) + (-6\hat{\imath} + 9\hat{\jmath}) = -16\hat{\imath} + 17\,\hat{\jmath}$$

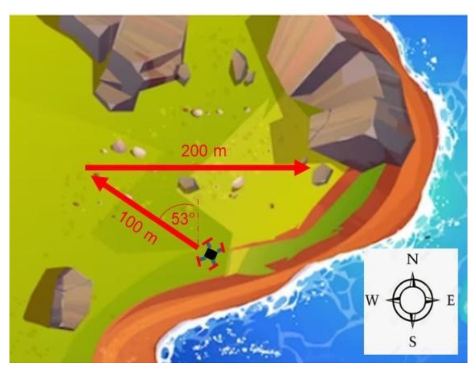
Ejemplo 3.3

Un dron recorre una distancia de 100 metros en un ángulo de 53° medido de Norte hacia el Oeste (NO) y posteriormente se mueve 200 metros hacia el Oeste (O). Encuentre:

a) El desplazamiento total efectuado por el dron.

b) La distancia al punto de partida a la cual queda después del segundo desplazamiento.

Figura 3.5



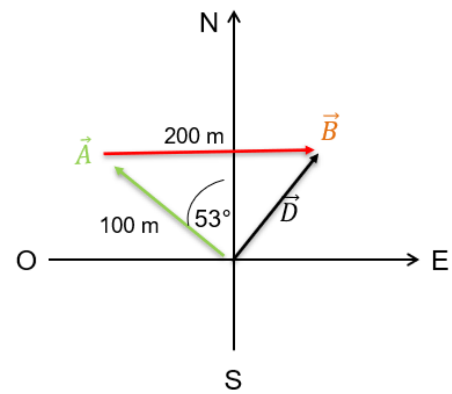
Adaptado de klyaksun, s.f., 123RF.

Solución

Llevamos los dos desplazamientos que designaremos por $\vec{A}$ y B a un sistema de coordenadas cartesianas asociando los puntos cardinales a los ejes x e y.

Expresamos cada vector en componentes cartesianas $\vec{A} = -100 \cdot sen(53)\,\hat{\imath} + 100 \cdot cos\,cos\,(53)\;\hat{\jmath}$

Figura 3.6



$\vec{A} = 79{,}9\,\hat{\imath} + 60{,}2\,\hat{\jmath}\;\; m$

$\vec{B} = 200\,\hat{\imath}$

a) El desplazamiento neto $\vec{D}$ corresponde a la suma de ambos vectores.

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} = (79{,}9\,\hat{\imath} + 60{,}2\,\hat{\jmath}\,) + \;200\,\hat{\imath}$$

$\vec{D} = 279{,}9\,\hat{\imath} + 60{,}2\,\hat{\jmath}$ (m)

b) La distancia final en la que queda el dron del punto de partida u origen corresponde a la magnitud del desplazamiento total.

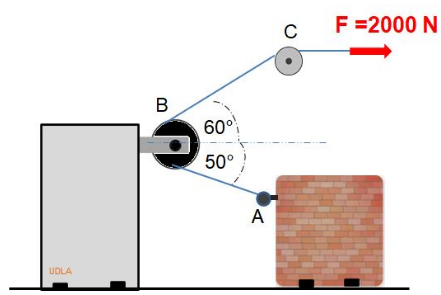
De la figura (3.6), la expresión para calcular la magnitud de un vector es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Luego, $D = \sqrt{{D_x}^2 + {D_y}^2} = \sqrt{279{,}9^2 + 60{,}2^2} = 286{,}3\;(m)$

Ejemplo 3.4

Figura 3.7



En el sistema de la Figura 3.7, una fuerza F=2000 N es aplicada en el extremo de una cuerda que pasa por dos poleas B y C y el otro extremo está fijo en el punto A.

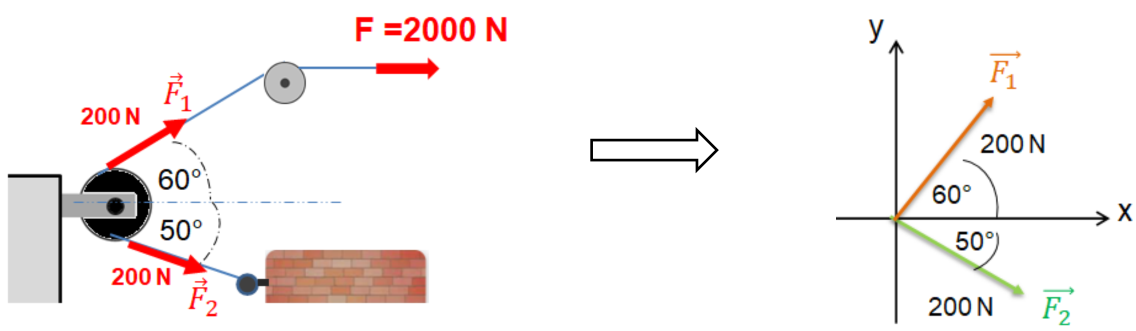
Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre la polea B empotrada en un bloque fijo al suelo.

Solución

En el caso estático, las poleas tienen como función cambiar la dirección de la fuerza y es así cómo sobre la polea actúan dos fuerzas de igual magnitud F=2000 N.

Llevando ambas fuerzas a un plano cartesiano.

Figura 3.8



Las fuerzas $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$ en forma cartesiana son

$$\overrightarrow{F_1} = 200 \cdot cos\, cos\, (60)\, \hat{\imath} + 200 \cdot sen(60)\hat{\jmath} = 100\, \hat{\imath} + 173{,}2\, \hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_2} = 200 \cdot cos\, cos\, (50)\, \hat{\imath} - 200 \cdot sen(50)\hat{\jmath} = 128{,}6\, \hat{\imath} - 153{,}2\, \hat{\jmath}$$

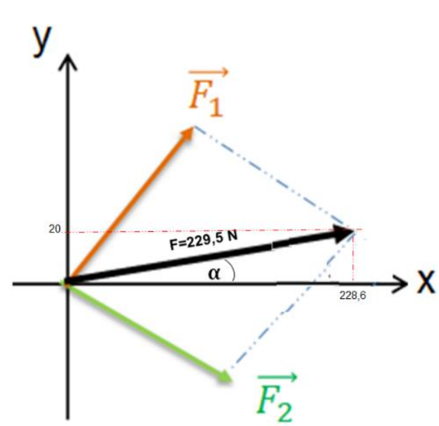
La fuerza neta viene dada por

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (100\, \hat{\imath} + 173{,}2\, \hat{\jmath}) + (128{,}6\, \hat{\imath} - 153{,}2\, \hat{\jmath}) = 228{,}6\, \hat{\imath} + 20\, \hat{\jmath}\ (N)$$

La magnitud viene dada por

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{228{,}6^2 + 20^2} = 229{,}5\ (N)$$

Figura 3.9



El ángulo de la fuerza neta respecto del eje x se obtiene como:

$$tg(\alpha) = \frac{20}{228{,}6} \Bigg/ tg^{-1}$$

$$\alpha = 5°$$

Actividades

1. Un avión vuela desde Santiago de Chile a Brasil que está a una distancia promedio de 2853 Km en un ángulo de 50° (NE). Posteriormente, desde Brasil vuela a Paraguay que está a una distancia promedio de Brasil de 1231 Km en un ángulo de 30° (SO).

Adaptado de dikobrazik, s.f., 123RF.

Encuentre:

a) El desplazamiento total del viaje respecto del punto de partida.

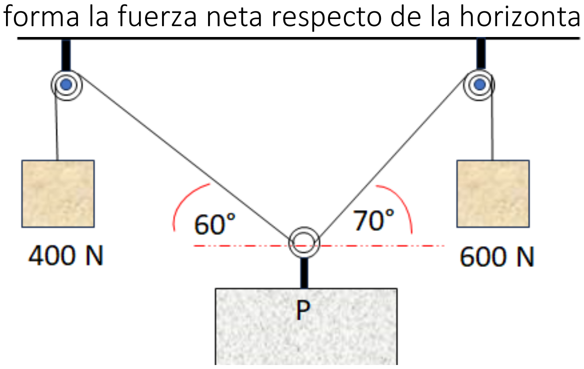
b) La distancia a la cual está el avión al final del viaje respecto a Santiago de Chile.

2. En el sistema de la figura, una arandela en P es sometida a una fuerza efectuada por una carga producida por dos cuerpos de pesos 400 N y 600 N.

Encuentre:

a) La fuerza neta sobre la arandela.

b) El ángulo que forma la fuerza neta respecto de la horizontal.



CAPÍTULO 4: CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

Resumen

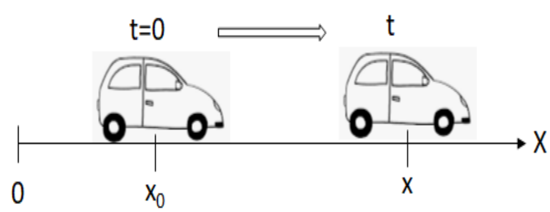
En esta unidad se abordará el movimiento de una partícula en una dimensión, su posición velocidad y aceleración, así como su representación gráfica de posición y velocidad en función del tiempo.

4.1. Conceptos fundamentales

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin atender a su causa. Su objetivo es conocer cómo y dónde se encuentra un cuerpo en un tiempo particular.

Velocidad media: La velocidad media es un vector definido como la tasa de cambio en el tiempo de la velocidad de un móvil. En un movimiento en una dimensión (Figura 4.1), por ejemplo, a lo largo del eje x, la naturaleza vectorial de la velocidad se da según el sentido de movimiento (derecha o izquierda). Por otro lado, la rapidez corresponde a la magnitud de la velocidad. La velocidad media viene entonces dada por la expresión (4.1):

Figura 4.1



$$v_m = \frac{x - x_0}{t} \qquad (4.1)$$

Donde $(x - x_0)$ es el desplazamiento y t es el tiempo en la cual se realiza dicho desplazamiento.

x_0: Posición del móvil en t=0 seg

x: Posición del móvil en t segundos

Su unidad puede ser en m/s, Km/hora, pie/segundos, etc.

Ejemplo 4.1

Un móvil parte desde la posición x= 3 m y se desplaza 15 metros en la dirección x en un tiempo de 4 segundos. Encuentre su velocidad media.

$$v_m = \frac{x-x_0}{t} = \frac{18-3}{5} = 3\ m/s$$ En este caso el móvil se mueve hacia la derecha (+x).

Ejemplo 4.2

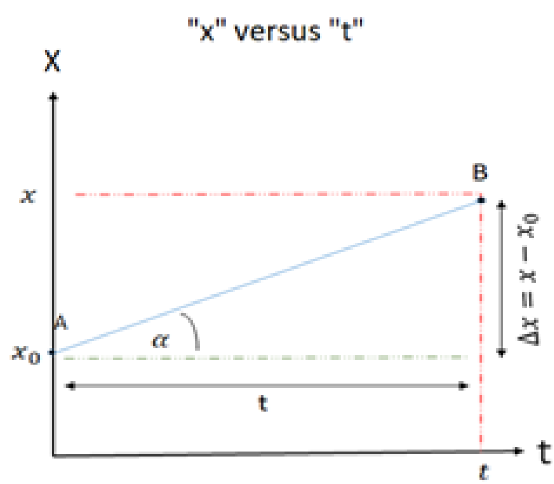
Un móvil, inicialmente se encuentra en x=10 m y después de 3 segundos se encuentra en la posición x=-8 m. Encuentre su velocidad media.

$$v_m = \frac{x-x_0}{t} = \frac{-8-10}{3} = 6\ m/s$$ En este caso el móvil se mueve hacia la izquierda (-x).

4.2. Interpretación gráfica de la velocidad media

Los puntos descritos en la Figura 4.1 pueden ser representados a través de un gráfico:

Figura 4.2



Como se ve de la expresión (4.2), la velocidad media es tomada entre puntos inicial y final A-B.

De la gráfica

$$tangente(\alpha) = \frac{x - x_0}{t} \qquad (4.2)$$

Expresión que resulta ser igual a la velocidad media:

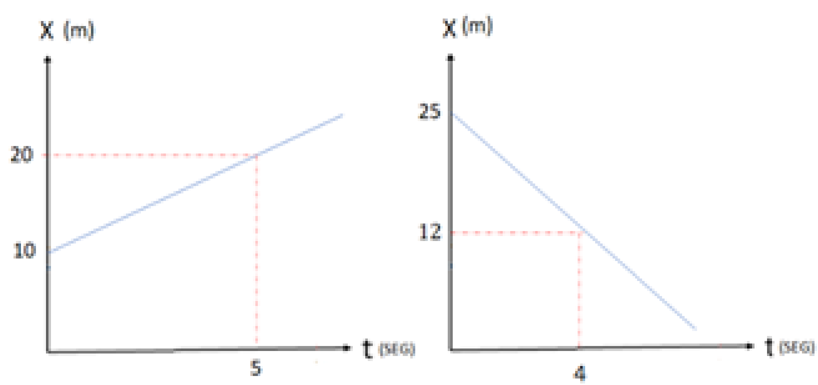
$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = tg(\alpha) \qquad (4.3)$$

La velocidad media del movimiento es igual a la pendiente de la recta que une los punto final e inicial del movimiento.

Ejemplo 4.3

El movimiento de un móvil es representado en una gráfica x vs t (Figura 4.3). Determine la velocidad media en los casos (a) y (b).

Figura 4.3



Solución

Caso (a): $v_m = tg(\alpha) = \frac{20-10}{5} = 2\ m/s$ El móvil se mueve en dirección +x

Caso (b) $v_m = tg(\alpha) = \frac{12-25}{4} = -3{,}25\ m/s$ El móvil se mueve en dirección -x

La velocidad media no da cuenta de la “historia del movimiento”. El móvil puede realizar el movimiento de infinitas formas en el mismo intervalo de tiempo, da una velocidad media entre dos tiempos (final-inicial) y no en un tiempo en particular (Figura 4.3). Por ejemplo, en un viaje de Santiago a Viña un auto tarda 1 hora en recorrer alrededor de 100 km, que es aproximadamente la distancia entre las dos ciudades. Entonces, la velocidad media es

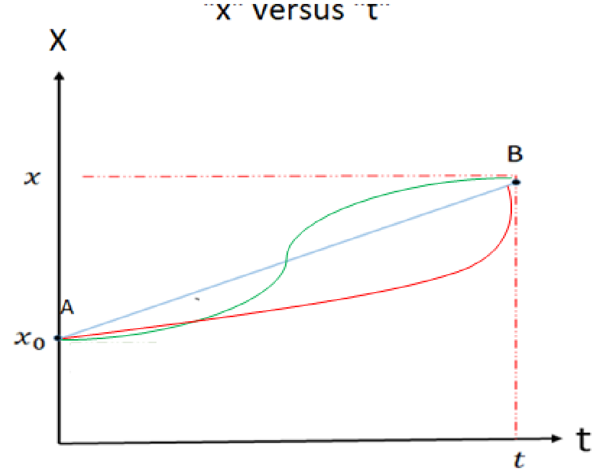
$$v_m = \frac{\Delta x}{t} = 100\ Km/hora.$$

Sin embargo, es bien sabido que durante el viaje ocurren cambios en su valor, por ejemplo, se torna cero en el momento de pagar un peaje.

Por este motivo es que se define la velocidad instantánea, cuyo valor da la velocidad para un tiempo particular.

Figura 4.4

"x" versus "t"



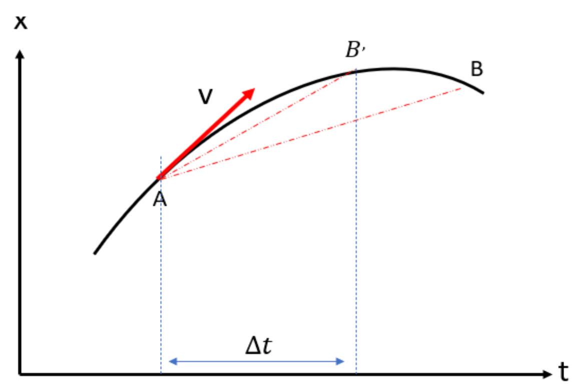
4.3. Velocidad instantánea

La velocidad instantánea se define como el límite cuando el tiempo tiende a cero de la velocidad media. Esto es

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (4.4)$$

La Figura 4.5 muestra el proceso para la determinación de la velocidad en el punto A para un tiempo en particular. Se observa que al tender el intervalo de tiempo a cero en la medida que el punto B se acerca al punto A, la pendiente de los puntos que unen A con B tiende a la tangente de la gráfica en el punto A.

Figura 4.5



Nota: Interpretación gráfica de la velocidad instantánea.

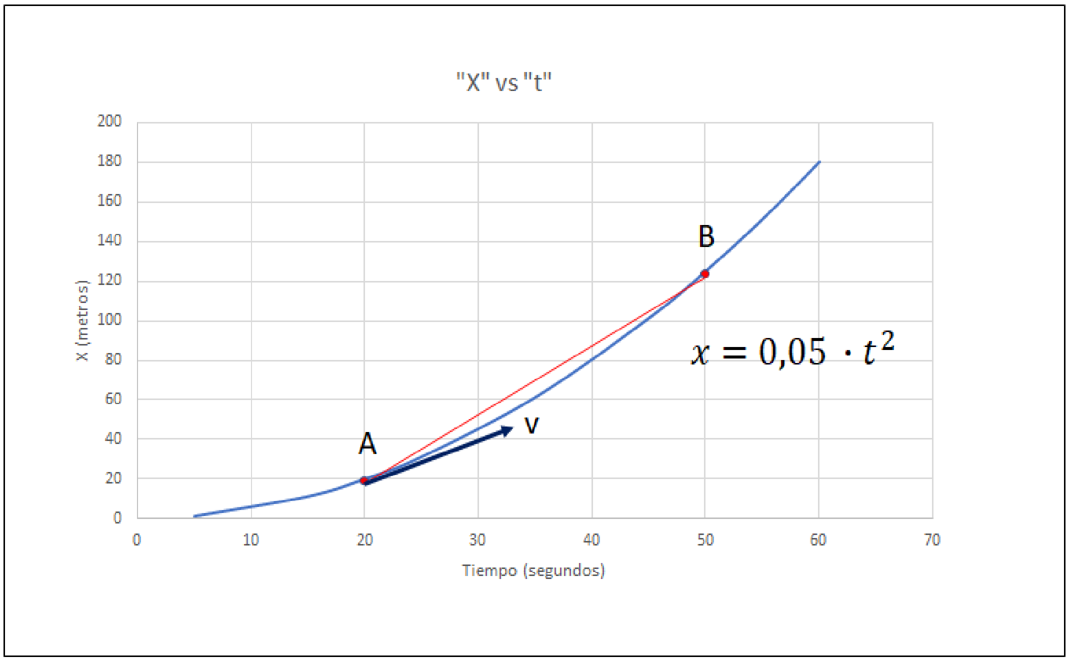
Ejemplo 4.4

Un móvil se mueve según la gráfica posición versus t de la Figura 4.6. Con la información entregada, encuentre:

a) La velocidad media entre los tiempos t_A=20 segundos y t_B= 50 segundos.

b) La velocidad en t_A= 20 segundos.

Figura 4.6



Solución

a) $v_m = \frac{x(50s)-x(20s)}{50-20} = \frac{120-20}{30} = 3{,}3\,\frac{m}{s}$

b) $v_A = \frac{dx}{dt} = \frac{d(0{,}05\,t^2)}{dt} = 2 \cdot 0{,}05\,t = 0{,}1 \cdot t$

En t= 20 segundos $v = 0{,}1 \cdot 20 = 2\,m/s$

4.4. Aceleración

La aceleración es una medida de la rapidez con la cual cambia la velocidad de un cuerpo. Esto es

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (4.5)$$

Las unidades en el S.I. de la aceleración corresponden a una razón entre la velocidad y el tiempo. Esto es

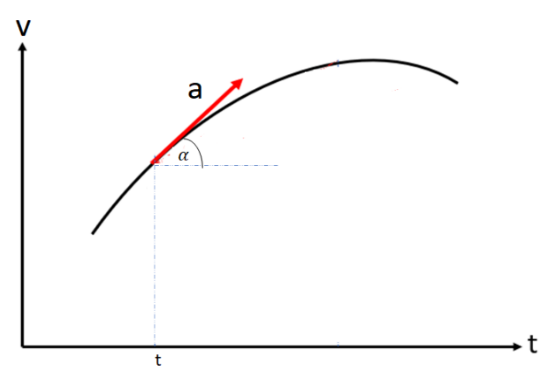
$$[a] = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

4.5. Representación gráfica de la aceleración

La aceleración en un instante en particular en un gráfico velocidad versus tiempo corresponde a la tangente a la curva en dicho tiempo (Figura 4.7).

La gráfica de la figura muestra un movimiento en que la aceleración es variable dado que la pendiente cambia en cada punto.

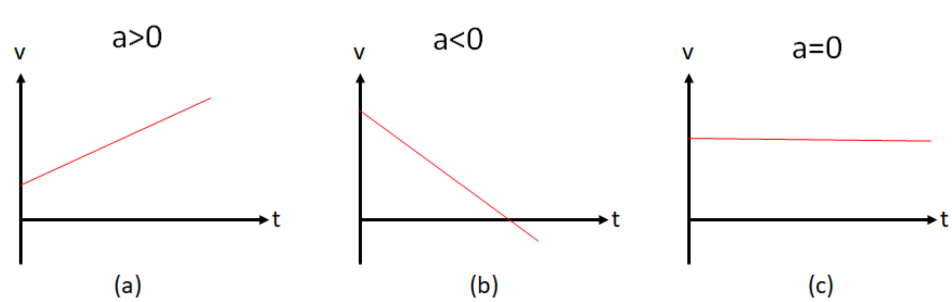
Figura 4.7



4.5.1. Movimiento uniforme acelerado M.U.A

En un movimiento uniforme acelerado, la aceleración permanece constante lo que significa que la pendiente en una gráfica de posición versus el tiempo permanece constante, por lo cual, la relación entre la posición y el tiempo es lineal (Figura 4.8).

Figura 4.8



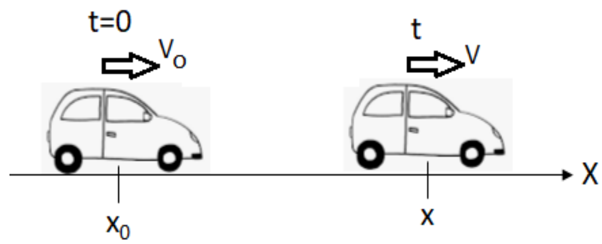
Nota: (a) aceleración positiva, (b) aceleración negativa y (c) aceleración nula. Velocidad constante.

De la expresión (4.5):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \quad \rightarrow \quad v = v_0 + a\,t \qquad (4.6)$$

La expresión 4.6 es la velocidad de un móvil que acelera de manera uniforme con aceleración "a" en donde v_o es su velocidad inicial (Figura 4.9).

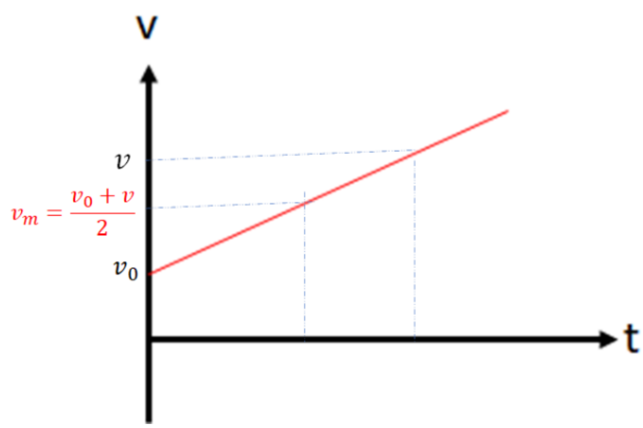
Figura 4.9



En un movimiento M.U.A (Figura 4.10), como la relación entre la velocidad y el tiempo es lineal, entonces la velocidad media puede calcularse como

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2} \qquad (4.7)$$

Figura 4.10



De la expresión $v_m = \frac{x - x_0}{t}$, igualando con (4.7)

$$\frac{v_0 + v}{2} = \frac{x - x_0}{t} \quad \rightarrow \quad x = x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) t$$

con lo cual, usando (4.6), obtenemos el siguiente resultado para *v* :

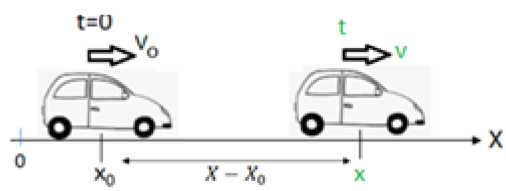
$$x = x_0 + \left(\frac{v_0 + (v_0 + a\,t)}{2}\right) t \;\rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\,a t^2 \qquad (4.8)$$

Una expresión para la velocidad *v* independiente del tiempo puede obtenerse a partir de la expresión (4.8) de donde $t = \frac{v - v_0}{2\,a}$, esto es:

$$x = x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) \cdot t \;\rightarrow x = x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) \cdot \frac{v - v_0}{a} \;\rightarrow\; x - x_0 = \frac{v^2 - {v^2}_0}{2a}$$

De donde para v se obtiene finalmente $\quad v^2 = {v^2}_0 + 2\,a(x - x_0) \qquad (4.9)$

TABLA RESUMEN CINEMÁTICA 1-D



$$v = v_0 + a\,t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\,a t^2$$

$$v^2 = {v^2}_0 + 2\,a(x - x_0)$$

$con{:}\; x_0 \; y \; v_0 \; posición \; y \; velocidad \; inicial \;\; (t = 0)$

$\boldsymbol{a}$: ***aceleración***

Ejemplo 4.5

1. Un móvil se mueve con rapidez 10 m/s, luego acelera de manera uniforme hasta alcanzar una rapidez de 20 m/s. en 5 segundos. Encuentre:

a) la aceleración del móvil.

b) la velocidad cuando t= 8 segundos.

c) la posición cuando t=10 segundos.

Solución

a) La rapidez inicial v_0 es de $0\ (m/s)$ puesto que parte del reposo, luego usando (4.6) para la aceleración a.

$$v = v_0 + a\,t \quad \rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{20-10}{5} = 2\,m/s^2$$

b) Usando (4.6) $v = v_0 + a\,t \ \rightarrow v = \ 10 + 2 \cdot 8 = 26\,m$

c) En el ejemplo, como no se especifica una posición inicial, podemos tomar $x_0=0$ y usando (4.8) obtener la posición en t=10 segundos.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\,at^2 \quad \rightarrow x = 0 + 10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 = 200\,m$$

Ejemplo 4.6

Un móvil parte del reposo y acelera a razón constante de 4 m/s^2 en la dirección x. Encuentre el desplazamiento cuando su rapidez es de 8 m/s.

Solución

En este ejemplo y dado que el móvil en todo instante se mueve en la misma dirección x, entonces el desplazamiento x-x_0 en la expresión (4.9) coincide con la distancia recorrida.

$$v^2 = {v^2}_0 + 2\,a(x - x_0) \rightarrow \ 8^2 = 0^2 + 2 \cdot .4 \cdot (x - 0) \ \rightarrow x = 8\,metros$$

Ejemplo 4.7

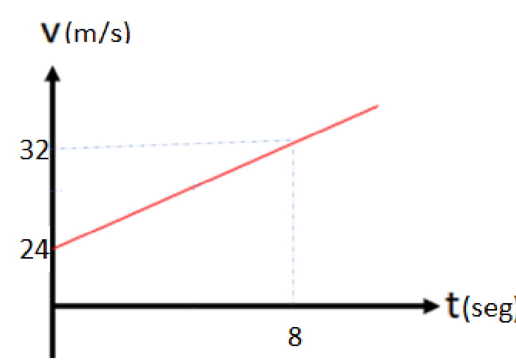
El movimiento de un móvil está representado en una gráfica v versus t (Figura 4.11). Si el móvil inicialmente se encuentra en x = -2 m, encuentre:

a) Su aceleración.

b) La posición del móvil para cualquier tiempo.

c) El tiempo para el cual el móvil pasa por el origen.

Figura 4.11



Solución

a) De la gráfica $v_0 = 24\frac{m}{s}\,y\ v = 32\,m/s$

Luego $a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{32-24}{8} = 1\,m/s^2$

b) La posición (8) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\, at^2$

$x(t) = -2 + 24\, t + \frac{1}{2}\, t^2 \;\; (metros)$

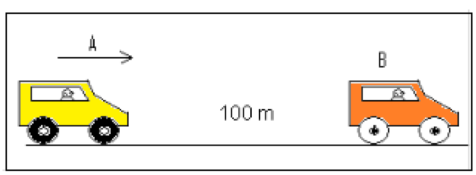
c) Pasa por el origen cuando x=0. Igualando a 0 la expresión obtenida en (b).

$-2 + 24\, t + \frac{1}{2}\, t^2 = 0$ y ordenando $t^2 + 48\, t - 4 = 0$, ecuación cuadrática que tiene soluciones -48,08 y 0,08.

La solución negativa no tiene significado físico, por lo que para un tiempo de 0,08 segundos el móvil pasa por el origen.

Actividades

1. Un atleta parte del reposo y alcanza su velocidad máxima de 30 m/s en 4 segundos y recorre 20 metros. Posteriormente, mantiene la rapidez constante hasta completar la carrera al cabo de 30 segundos. Encuentre:
   a) La aceleración del atleta al comienzo de la carrera.
   b) La distancia total recorrida por el atleta desde el tiempo de reposo hasta el final de la carrera.
2. Dos móviles A y B inicialmente se encuentran a una distancia de 100 m. Ambos parten del reposo, el móvil A tiene una aceleración de 4 m/s^2 y B de 2 m/s^2. Encuentre:
   a) El tiempo para el cual se encuentran.
   b) La distancia de encuentro medida desde el punto donde el móvil A inicia su movimiento.



CAPÍTULO 5: CAÍDA LIBRE Y MOVIMIENTO PARABÓLICO

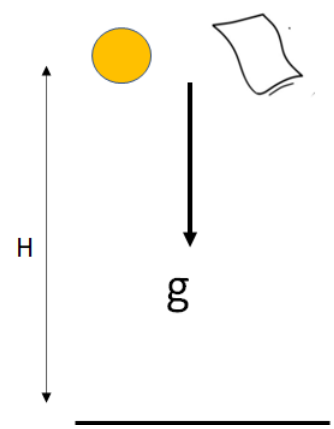
Resumen

En esta unidad se aborda el movimiento de una partícula en lanzamiento vertical, movimiento con aceleración constante correspondiente a la de gravedad. Posteriormente se generaliza este movimiento al de dos dimensiones en lo que se denomina lanzamiento de proyectil como una superposición de dos movimientos, uno vertical acelerado y uno horizontal no acelerado.

5.1. Lanzamiento vertical y caída libre

Todos los cuerpos en las cercanías de la superficie terrestre caen con la misma aceleración llamada de gravedad "g", cuyo valor depende de la ubicación geográfica y que bordea por los 9,8 m/s^2. Así una esfera de acero y una hoja de papel que se dejan caer desde cierta altura H tardan lo mismo en llegar a la base en ausencia de aire. En la práctica el aire provoca fuerzas de fricción y de forma, de tal modo que a la hoja de papel le toma más tiempo en llegar al suelo. La aceleración de gravedad es un vector y apunta hacia el centro de la tierra (Figura 5.1).

Figura 5.1



Un lanzamiento vertical por tanto corresponde a un movimiento con aceleración constante "g" de modo que son válidas las expresiones obtenidas anteriormente para el estudio de un movimiento uniformemente acelerado.

Un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba tomando el eje "y" positivo hacia arriba, entonces la aceleración es $-g\,\hat{\jmath}$.

En las expresiones para un movimiento uniforme acelerado la aceleración toma el valor de -g y la coordenada de posición ahora es "y" en lugar de "x".

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \rightarrow \quad v_y = v_{0y} - g\,t \tag{5.1}$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2}\,a_x t^2 \quad \rightarrow \quad y = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{5.2}$$

$$v_x{}^2 = v^2{}_{0x} + 2\,a_x(x - x_0) \quad \rightarrow \quad v^2{}_y = v_{0y}{}^2 - 2\,g\,(y - y_0) \tag{5.3}$$

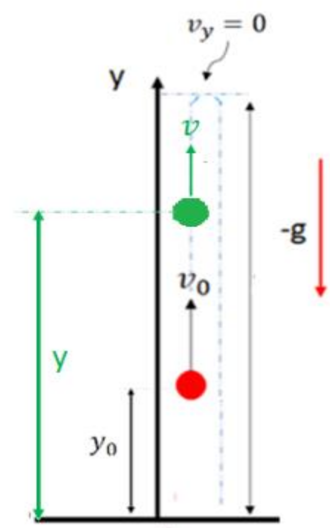
TABLA RESUMEN LANZAMIENTO Y CAÍDA LIBRE

$$v_y = v_{0y} - g\,t \qquad (5.4)$$

$$y = y_0 + v_{oy}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad (5.5)$$

$$v^2{}_y = v_{0y}{}^2 - 2\,g\,(y - y_0) \qquad (5.6)$$

Figura 5.2

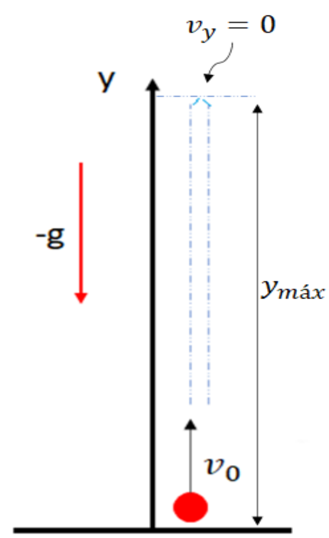


Donde v_0 : *velocidad* y y_0: *altura inicial del lanzamiento*

Si un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con rapidez v_0 (Figura 5.3) donde el origen es puesto en el punto de lanzamiento (y_0=0), entonces:

$$y = v_{oy}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad (5.5)$$

Figura 5.3



Ejemplo 5.1

Se lanza hacia arriba un objeto con velocidad 20 m/s. Encuentre:

a) El tiempo en la cual alcanza la altura máxima.

b) La altura máxima

c) El tiempo total de vuelo.

Solución

a) Cuando alcanza la altura máxima, la velocidad es cero. En tal condición de (5.1):

$$v_y = v_{0y} - g\,t \;\rightarrow 20 - 9{,}8\,t \;\rightarrow\; t_m = 2{,}04\;seg$$

b) Cuando $t_m = 2{,}04\;seg$ "y" es máximo. De (5.5)

$$y = y_0 + v_{oy}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \;\rightarrow y_m = 20 \cdot\, t_m - \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}8\; \cdot t_m{}^2 \;\rightarrow\; y_m = 20{,}41\;m$$

c) Para determinar el tiempo de vuelo debemos resolver el tiempo para el cual la coordenada y = 0 (punto de lanzamiento).

De (5.5) $y = 20 \cdot\, t_v - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\; \cdot t_v{}^2 \quad\rightarrow\quad t_v = \frac{20}{\left(\frac{9{,}8}{2}\right)} = 4{,}08\;seg$

En este ejemplo, el tiempo de vuelo t_v resulta ser el doble del tiempo t_m. Esto es así debido a que el objeto regresa al mismo punto desde donde fue lanzado. No es una condición general.

Ejemplo 5.2

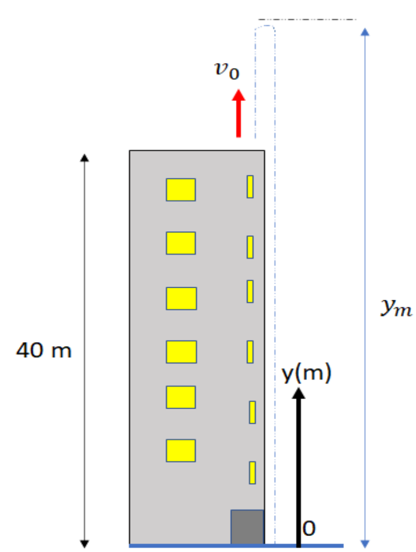
Un objeto es lanzado hacia arriba con v_0= 30 m/s desde lo alto de un edificio de altura H=40 m. Encuentre:

a) El tiempo de vuelo.

b) Velocidad al llegar a la calle

c) Altura máxima alcanzada respecto a la calle.

Figura 5.4



Solución

a) Tomamos el origen en la calle. Así y_0= 40 m es la posición del cuerpo cuando t=0 y la expresión (5.5) aplicada a este caso es:

$$y = y_0 + v_{oy}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \quad\rightarrow\quad y = 40 + 30\,t - \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

El cuerpo alcanza la calle cuando y = 0, esto es

$$40 + 30\,t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2 = 0 \quad \rightarrow 4{,}9\,t^2 - 30\,t - 40 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática son t_1=-1,1 y t_2=7,2.

Tomamos la segunda solución, puesto que un tiempo negativo no tiene sentido físico. Así, el tiempo de vuelo es de t_v = 7,2 segundos.

b) La velocidad al tocar la calle se utiliza usando el tiempo de vuelo t_v=7,2 que corresponde al momento de impacto. De la expresión (5.1):

$$v_y = v_{0y} - g\,t \;\rightarrow\; v_y = 30 - 9{,}8\;\cdot 7{,}2 = -40{,}6\,m/s$$

El signo negativo tiene sentido pues el cuerpo va en bajada.

c) El objeto alcanza la altura máxima cuando v_y=0

d) Usando [10] $v_y = v_{0y} - g\,t \quad \rightarrow 30 - 9{,}8\,t_m = 0 \quad \rightarrow \; t_m = 3{,}1\,seg$

La coordenada y será máxima cuando t=3,1 segundos, luego usando (5.5)

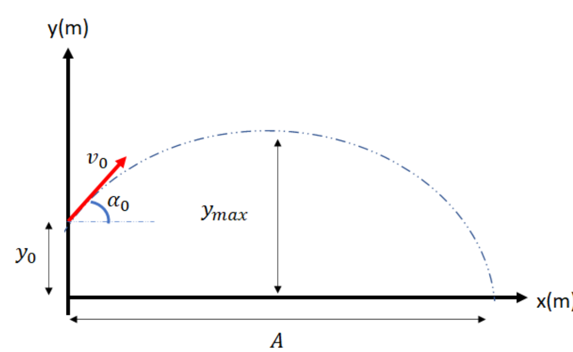
$$y = y_0 + v_{oy}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \quad \rightarrow \; y_m = 40 + 30 \cdot 3{,}1 - \tfrac{9{,}8}{2} \cdot 3{,}1^2 = 85{,}9\,m$$

La altura máxima alcanzada respecto de la calle es de 85,9 m.

5.2. Lanzamiento de proyectiles

Un lanzamiento de proyectil es una combinación de dos movimientos. Uno a lo largo del eje "x" con velocidad constante (se desprecia el roce con el aire) y otro a lo largo del eje "y" con aceleración constante $a = -g\,\hat{\jmath}$. La trayectoria del proyectil corresponde a una parábola cuyos coeficientes dependen de las condiciones iniciales dadas por la posición inicial y_o, la rapidez inicial de disparo v_o y el ángulo de disparo α_0.

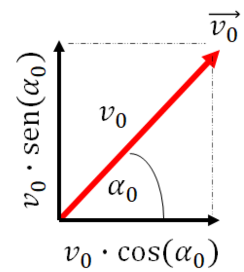
Figura 5.5



La velocidad inicial tiene componentes en "x" e "y" son respectivamente:

$v_{0x} = v_0\, cos(\alpha_0) \quad y \quad v_y = v_0\, sen(\alpha_0)$.

Figura 5.6



- **Expresiones sobre el eje "x":**

Movimiento con velocidad constante → $a = 0$.

De (5.1) con a = 0 : $v = v_{0x} + a\,t \;\rightarrow\; v_x = v_{0x} = v_0\, cos(\alpha_0)$ constante. (5.7)

De (5.2) con x_0 = 0 y a = 0 : $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}\, at^2 \;\rightarrow x = \; v_0\, cos(\alpha_0) \cdot t$

- **Expresiones sobre el eje "y":**

En el eje "y" la aceleración es negativa y de magnitud g.

Usando (5.1) para la componente "y" de la velocidad, se tiene

con $a = -g$: $v_y = v_{0y} - g\,t \quad \rightarrow\; v_y = v_0\, sen(\alpha_0) - g\,t$

y para la componente "y" usando (5.2)

(5.8)

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}\, gt^2 \;\; \rightarrow y = \; y_0 + v_0\, sen(\alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

TABLA RESUMEN LANZAMIENTO DE PROYECTIL

$v_x = v_{0x} = v_0\, cos(\alpha_0) \qquad v_y = v_0\, sen(\alpha_0) - g\,t$

$x = \; v_0\, cos(\alpha_0) \cdot t \qquad y = \; y_0 + v_0\, sen(\alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2$

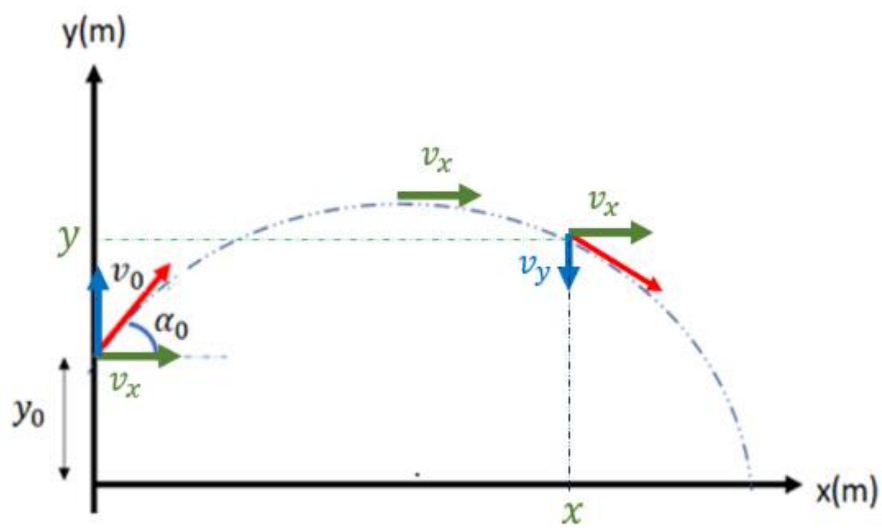
Con

$$y_0 : punto\ inicial\ de\ lanzamiento$$

$$v_0 : rapidez\ inicial\ (magnitud\ de\ la\ velocidad)$$

$$\alpha_0: ángulo\ inicial\ de\ lanzamiento$$

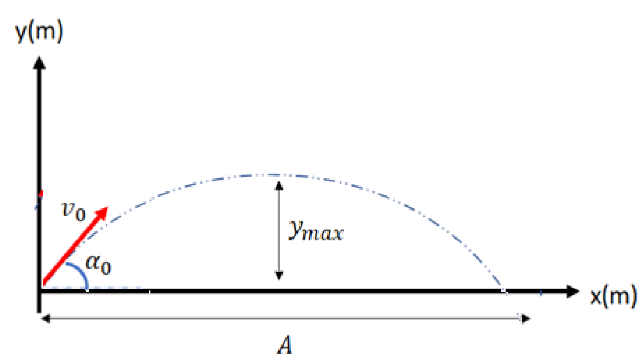
Figura 5.7



Ejemplo 5.3

Un proyectil es lanzado con rapidez de 20 m/s y un ángulo de lanzamiento de 53° respecto de la horizontal. Encuentre la altura máxima y_m que alcanza el proyectil y el alcance horizontal A.

Figura 5.8



Solución

La condición para la cual alcanza la altura máxima es que la velocidad sea $v_y = 0$.

Usando la expresión [16] para encontrar el instante de máxima altura.

$$v_y = v_0\ sen(\alpha_0) - g\ t = 0 \qquad \rightarrow \quad t_m = \frac{v_0\ sen(\alpha_0)}{g} = \frac{20 \cdot sen(53)}{9{,}8} = 1{,}63\ seg$$

Reemplazando t_m en la expresión (5.2)

$$y = y_0 + v_0\ sen(\alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2}\ g \cdot t^2 \ \rightarrow \ y_m = 0 + 20 \cdot sen(53) \cdot 1{,}63 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}63^2$$

$$y_m = 13{,}02\ m$$

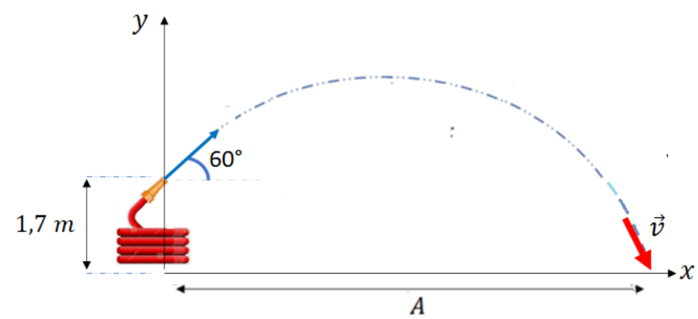
Ejemplo 5.4

Una manguera de bomberos arroja agua con una rapidez de 10 m/s. El ángulo de lanzamiento es de 60° y la posición de la boquilla es de 1,7m al suelo. Encuentre:

a) el alcance horizontal A del chorro de agua

b) la velocidad de impacto al llegar al suelo.

Figura 5.9



Adaptado de Mary San, s.f., Dreamstime.

Solución

Este problema puede considerarse como un lanzamiento de proyectil considerando que el agua está conformada por muchos elementos de volumen de agua y como tal son proyectiles lanzados en las mismas condiciones.

a) En este caso $y_0 = 1{,}7\ m$ y la magnitud de la velocidad inicial es $v_0 < 10\ m/s$. Usando la expresión (5.2)

$$y = y_0 + v_0\, sen(\alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad y = 1{,}7 + 10\, sen(60) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$y = 1{,}7 + 8{,}66 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

El alcance x = A ocurre cuando el agua impacta en el suelo, momento en el que la coordenada y del chorro es y = 0, luego:

$$y = 1{,}7 + 8{,}66 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \quad \rightarrow 4{,}9t^2 - 8{,}66\, t - 1{,}7 = 0$$

resolviendo la ecuación cuadrática para t se obtiene -0,18 y 1,95.

La solución negativa no tiene significado físico, luego la que vale es t = 1,95.

Reemplazando este tiempo en la expresión (5.2) para la coordenada x se obtiene el alcance x = A.

$$x = v_0\, cos(\alpha_0) \cdot t \quad \rightarrow \quad A = 10 \cdot cos\, cos\, (60°)\ \cdot 1{,}95 = 9{,}75\ m$$

b) Para obtener las componentes de la velocidad usamos las expresiones (5.1),

$$v_x = v_0\, cos(\alpha_0) \;\rightarrow\; v_x = 10 \cdot cos\, cos\,(60°) \;= 5\; m/s$$

$$v_y = v_0\, sen(\alpha_0) - g\, t \;\rightarrow\; v_y = 10 \cdot sen(60°) - 9{,}8\, t$$

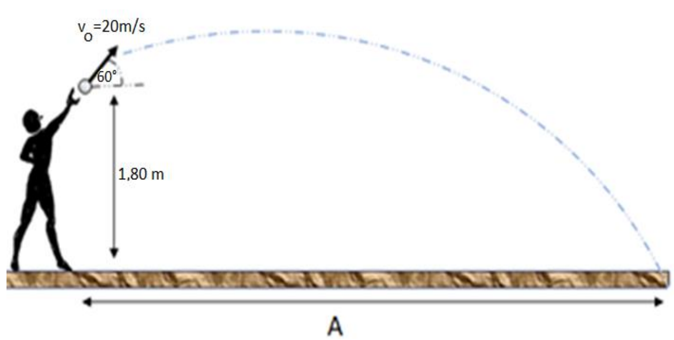
Y usando t = 1,95 (s) (impacto) $\rightarrow$ $v_y = 10 \cdot sen(60°) - 9{,}8 \cdot 1{,}95 = -10{,}44\; m/s$

Luego, la velocidad de impacto es $\vec{v} = 5\,\hat{\imath} - 10{,}44\,\hat{\jmath}\;\left(\frac{m}{s}\right)$

Actividades

1. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba de modo que el tiempo de vuelo, esto es el tiempo de retorno al punto de lanzamiento fue de 4 segundos. Encuentre:
   a) La rapidez con la cual fue lanzado el objeto.
   b) La altura máxima que alcanza el objeto.

2. Un lanzador de bala efectúa un lanzamiento de modo que la rapidez inicial es de v_0= 20 m/s y el ángulo de lanzamiento respecto de la horizontal es de 60°. Encuentre:



Fuente: Adaptado de Shutterstock, s.f.

   a) el alcance máximo horizontal A que alcanza la bala.
   b) la velocidad con la cual impacta la bala en el suelo.

CAPÍTULO 6: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Resumen

En esta unidad se aborda la dinámica según los efectos de la acción de fuerzas sobre los cuerpos y su relación con su masa y aceleración. Se analizan fuerzas de contacto como lo son tirar de una cuerda o empujar un cuerpo, la fuerza de gravedad (peso), además de considerar los efectos que tienen las fuerzas de roce sobre el eventual movimiento.

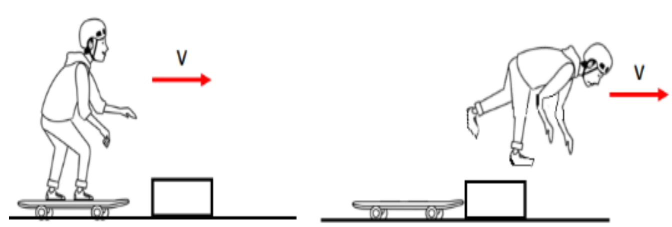
6.1. Leyes de Newton

La dinámica se sustenta en las Leyes de Newton y estudia el movimiento de los cuerpos atendiendo a su causa. Su objetivo es conocer los efectos que tienen las fuerzas aplicadas sobre el movimiento de las partículas.

6.1.1. Primera ley: Ley de Inercia

Todo cuerpo tiende a mantener su estado actual de movimiento. Así, si un objeto permanece en reposo o se mueve con velocidad constante permanece en tal estado a menos que sobre él actúe una fuerza externa.

Figura 6.1



6.1.2. Segunda ley: Ley de masas

Al aplicar una fuerza sobre un cuerpo de masa “m”, este acelera según la expresión:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (6.1)$$

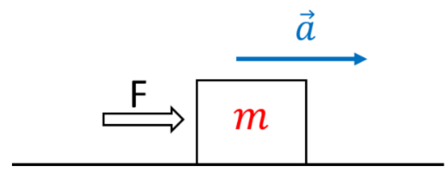
$\vec{a}$: Aceleración $\qquad$ $\vec{F}$: Fuerza aplicada $\qquad$ m: Masa del cuerpo

La masa “m” es una medida de la resistencia inercial de un cuerpo al movimiento que en el sistema internacional se mide en kilogramos.

Una manera más frecuente de presentar la segunda ley de Newton en su forma más sencilla es

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (6.2)$$

Figura 6.2



A partir de la expresión anterior, se observa que la fuerza en el sistema internacional tiene unidades de $Kg\frac{m}{s^2}$, combinación de unidades a la cual se denomina Newton. Esto es:

$$1\ \frac{Kg}{m\,s^2} \equiv 1\ Newton \qquad (6.3)$$

En general, sobre un cuerpo pueden actuar más de una fuerza de modo que la expresión (6.2) toma la siguiente forma:

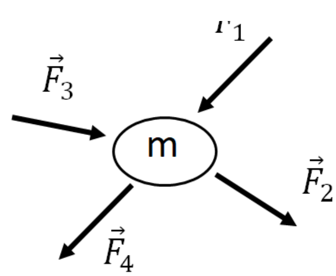
$$\sum_1^N \vec{F}_i = m\vec{a} \qquad (6.4)$$

N: Número de fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

m: masa del cuerpo

$\vec{a}$: Aceleración

Figura 6.3



Para el caso particular de la Figura 6.3:

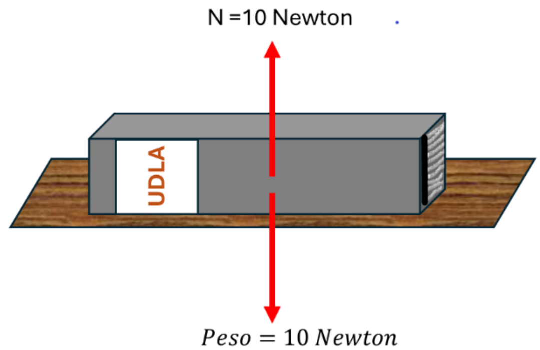
$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = m\,\vec{a}$$

6.1.3. Tercera ley: Ley de acción y reacción.

A toda acción correspondiente a una fuerza le corresponde una reacción de igual magnitud y de sentido contrario.

En la siguiente figura, el peso del libro es de 10 Newton y la magnitud de la fuerza de reacción N es 10 Newton. Estas fuerzas son un par de fuerzas acción y reacción.

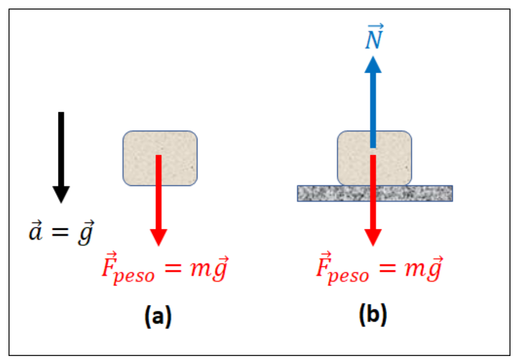
Figura 6.4



6.2. Fuerza peso

Suponga un cuerpo de masa m en caída libre (Figura 6.5). Su velocidad cambia con el tiempo por lo cual existe una aceleración y que corresponde a la aceleración de gravedad, de modo que sobre el cuerpo actúa una fuerza debido a la gravedad terrestre, fuerza con la cual la tierra atrae al cuerpo hacia su centro, de modo que (6.2) queda (escalarmente) como

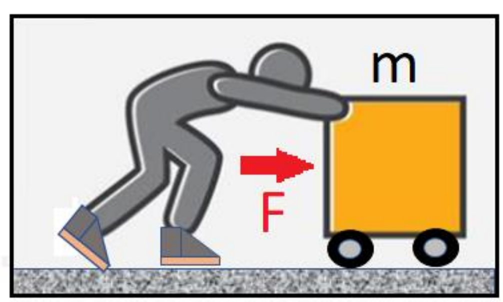
Figura 6.5



$$F_{peso} = m \cdot a = m \cdot g \qquad (6.5)$$

A este valor de la fuerza se le denomina fuerza peso y en el sistema internacional se mide en Newton.

Figura 6.6



Si el cuerpo se apoya ahora sobre una superficie (Figura 6.6), la fuerza peso actúa sobre la superficie y aparece la fuerza Normal que ejerce la superficie sobre el cuerpo. La fuerza normal corresponde a la reacción al peso. Estas dos fuerzas, la peso y normal, son de igual magnitud y sentidos opuestos.

Ejemplo 6.1

Un operario empuja un carro de 50 Kg con una fuerza de 500 N. Encuentre la aceleración que adquiere el carro.

Solución

$$\sum F = ma \quad \rightarrow 500 = 50 \cdot a$$

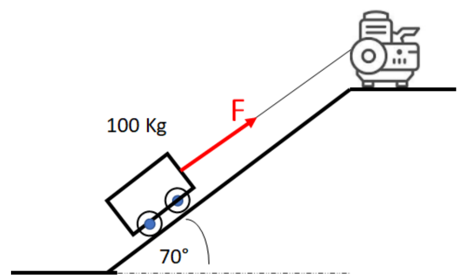
$$a = 10\, m/s^2$$

Ejemplo 6.2

Un carro de carga de masa 100 Kg es arrastrado por una pendiente utilizando un motor. Despreciando el roce, encuentre la fuerza que aplica el motor cuando la caja:

a) Sube con rapidez constante.
b) Acelera a razón de 2 m/s^2.

Figura 6.7



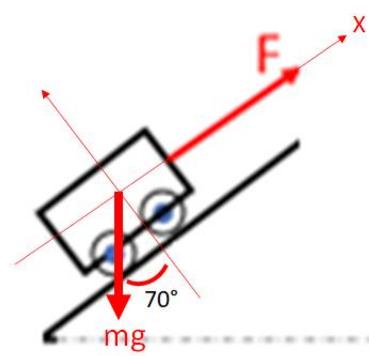
Solución

$$a) \sum F = ma \;\; donde \; a = 0 \quad por\ lo\ cual \quad \sum_{N}^{i=1} F = 0$$

$$F - mg \cdot sen(70) = 0$$

$$F = 100 \cdot 9{,}8 = 980\ N$$

Figura 6.8



$$b) \sum F = ma \quad \rightarrow \quad F - mg \cdot sen(70) = ma$$

$$F - 100 \cdot 9{,}8 \cdot sen(70) = 100 \cdot 2$$

$$F = 1120{,}9\ N$$

TABLA RESUMEN LEYES DE NEWTON

Primera Ley (de Inercia): Todo cuerpo tiende a mantener su estado actual de movimiento.

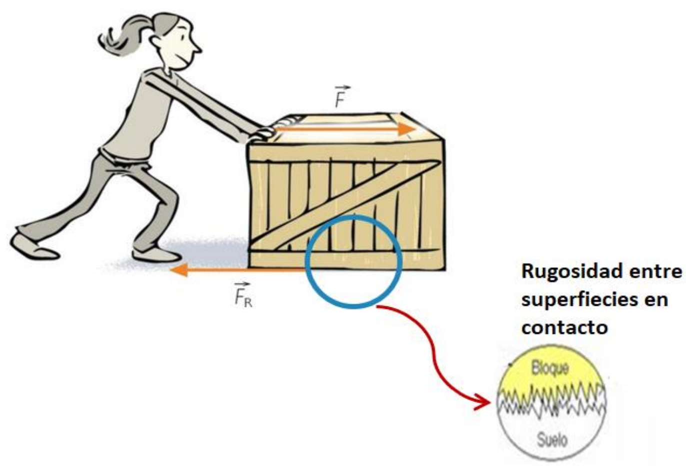
Segunda Ley (de masa): $\sum_1^N \vec{F}_i = m\vec{a}$

Tercera Ley: A toda fuerza de acción le corresponde una fuerza de reacción de igual magnitud y sentido contrario.

6.3. Fuerza de roce

La fuerza de roce aparece como consecuencia de la rugosidad de dos superficies en contacto y siempre se opone a la acción de movimiento. Es importante destacar que la fuerza de roce solo depende de la naturaleza de las superficies en contacto y las condiciones locales como humedad o lubricación, no así de la masa del cuerpo ni su disposición geométrica (superficie horizontal o en pendiente).

Figura 6.9



Adaptado de Gedo7, 27 de julio de 2021, Brainly.

La fuerza de roce aparece en dos formas, como estática y cinética.

- **Roce estático:** Cuando la fuerza aplicada sobre un cuerpo es menor que la fuerza de roce, este permanece en reposo de modo que se define una zona estática (Figura 6.9). En estas condiciones, la fuerza de roce es igual a la fuerza aplicada.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = 0 \ \rightarrow F - f_r = 0 \ \rightarrow f_r = F \qquad (6.6)$$

Como consecuencia, la fuerza de roce $\overrightarrow{f_r}$ aumenta linealmente con la fuerza aplicada $\vec{F}$.

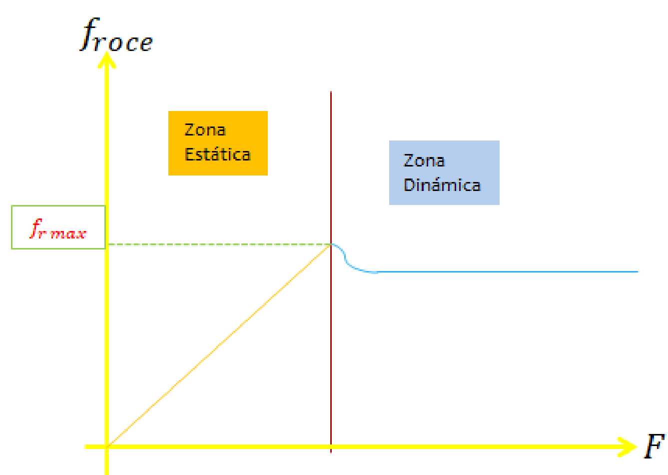
Se comprueba experimentalmente que la magnitud de la fuerza de roce estática cumple con la relación.

$f_r \leq f_{rmax}$ con $f_{rmax} = \mu_e N$

μ_e: Coeficiente de roce estático.

N: Fuerza normal

Figura 6.10



- **Roce cinético:** Cuando la fuerza aplicada sobre un cuerpo alcanza cierto valor definido como la fuerza de roce estático máximo $\overrightarrow{f_r}_{\text{máx}}$, este se pone en movimiento y el valor de la fuerza de roce disminuye y permanece constante independiente de la fuerza $\vec{F}$ aplicada (Figura 6.10). Experimentalmente se encuentra que la magnitud la fuerza de roce estático máxima es mayor que la fuerza de roce cinético, independientemente de la fuerza neta externa aplicada.

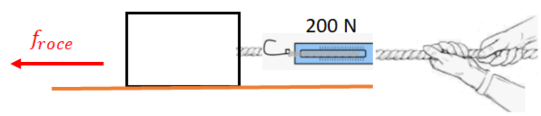
Figura 6.11

Adaptado de Leremy Gan, s.f., Etsy.

Ejemplo 6.3

Una caja de masa 50 Kg es arrastrada por una cuerda con una fuerza medida por un dinamómetro de 200 N. Entre el suelo y la caja existe una fuerza roce de f_r= 20 N. Encuentre la aceleración de la caja.

Figura 6.12



Solución

Este problema se presenta en una dimensión de modo que podemos prescindir de la representación vectorial teniendo presente que el carácter vectorial se da frente a fuerzas actuando en dirección positiva o negativa del eje x. Así, la expresión toma la forma:

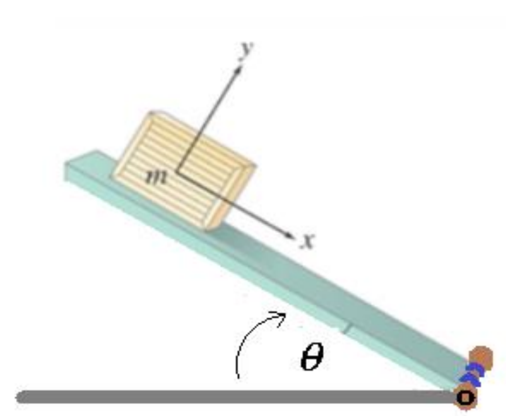
$$F - f_r = m \cdot a \quad \rightarrow \quad 200 - 20 = 50 \cdot a \ \rightarrow \ a = \frac{180}{50} = 3{,}6\, m/s^2$$

Ejemplo 6.4

Una caja de masa 80 Kg está apoyada sobre una superficie articulada en su base. Al aumentar gradualmente el ángulo de inclinación, se encuentra que cuando este es de 50°, la caja está a punto de deslizar. Una vez que se pone en movimiento la caja acelera a razón de 5 m/s^2.

Bajo estas condiciones, encuentre el coeficiente de roce estático y cinético.

Figura 6.13



Solución

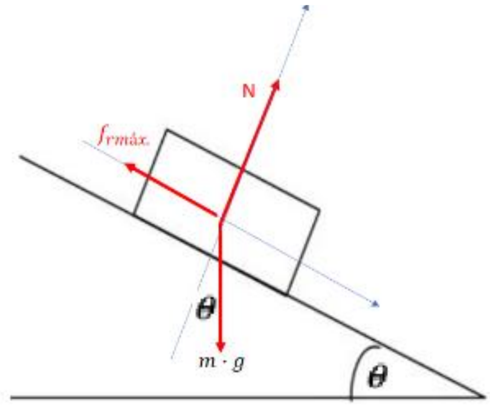
Cuando la caja está a punto de resbalar, entonces

$f_{rmax} = \mu_e N$

Y sobre el eje x aplicando la segunda ley de Newton

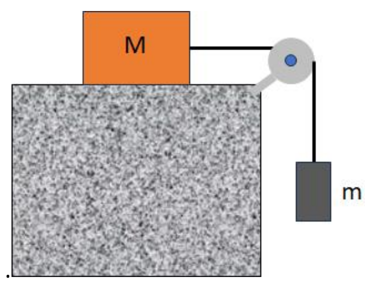
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad m \cdot g \cdot seno(\theta) - f_{rmax} = m \cdot a$$

Figura 6.14

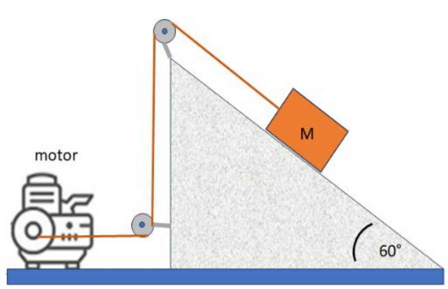


Actividades

1. En el sistema de la figura, una caja de masa M = 100 Kg está apoyada sobre una superficie en donde el coeficiente de roce estático es de $\mu_c = 0{,}4$. Encuentre el valor máximo de m de tal modo que el sistema permanezca en equilibrio.



2. En el sistema de la figura. Encuentre la fuerza que aplica el motor sobre el cable de modo que la caja de masa M = 80 Kg sube por el plano inclinado con una aceleración de 0,5 m/s^2. Entre la caja y el plano inclinado existe roce con $\mu_c = 0{,}25$.



CAPÍTULO 7: TRABAJO Y POTENCIA MECÁNICA

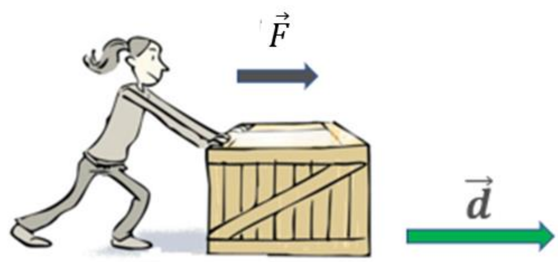
Resumen

En esta unidad se aborda el concepto de trabajo y potencia realizado sobre una partícula por una fuerza constante. Se definen operacionalmente el concepto de trabajo y potencia, y se utilizan para evaluar los efectos de la acción de una fuerza sobre una partícula considerando el desplazamiento de la partícula y el tiempo en el cual ocurre dicho desplazamiento.

7.1. Trabajo mecánico

Un agente externo realiza trabajo si aplica una fuerza F sobre un sistema y produce un desplazamiento en la misma dirección de la fuerza.

Figura 7.1

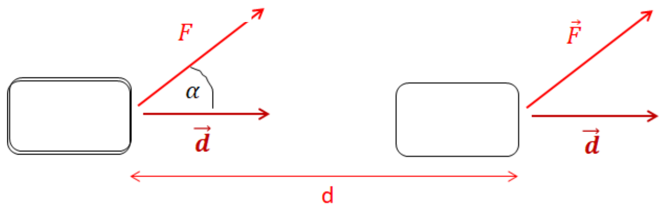


Adaptado de Gedo7, 27 de julio de 2021, Brainly.

En general, si la dirección de la fuerza aplicada no es paralela al desplazamiento, entonces, operacionalmente el trabajo se define como el producto punto o escalar entre los vectores fuerza aplicada $\vec{F}$ y desplazamiento $\vec{d}$:

$$w = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = w = F \cdot d \cdot cos(\alpha) \qquad (7.1)$$

Figura 7.2



La unidad de trabajo en el sistema internacional es el Joule.

7.1.1. Casos particulares

I) Si la fuerza aplicada es paralela al desplazamiento. El ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es $\alpha = 0°$.

La expresión (7.2) queda:

$$w = F \cdot d \cdot cos(0) = F \qquad (7.2)$$

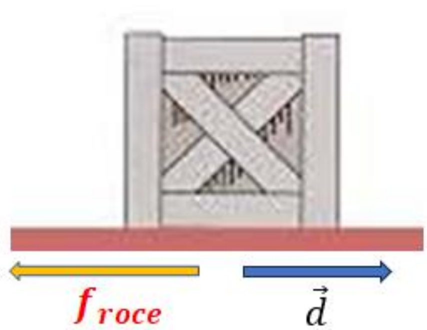
Un ejemplo se ilustra en la Figura 7.3.

II) Si la fuerza es de sentido opuesto al desplazamiento. Esto es el ángulo que forman la fuerza con el desplazamiento es $\alpha = 180°$.

La expresión 7.2 queda $W = Fdcos(180) = -Fd$

Luego el trabajo es negativo. Como ejemplo se tiene la fuerza de roce la cual siempre se opone al movimiento (Figura 7.3).

Figura 7.3



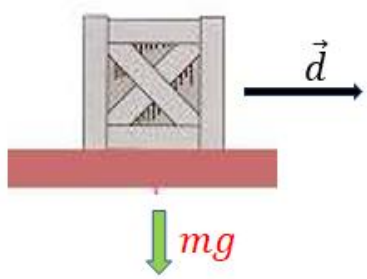
III) Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, esto es $\alpha = 90$.

La expresión (7.1) queda:

$$W = Fdcos(90) = 0 \qquad (7.3)$$

Luego, cuando la fuerza no aporta en la dirección del desplazamiento, esta no realiza trabajo (Figura 7.4). Por ejemplo, el peso no realiza trabajo cuando el movimiento es a lo largo de la horizontal.

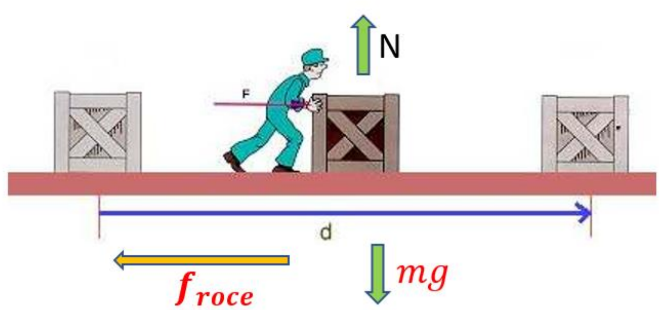
Figura 7.4



Ejemplo 7.1

Un operario mueve un cajón de 40 Kg aplicando una fuerza de 200 N. El cajón se mueve una distancia de 6 metros y existe roce entre el cajón y el suelo con $\mu_c = 0{,}25$. Encuentre el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la caja.

Figura 7.5



Adaptado de Stoonn, s.f., 123RF.

Solución

Como se indica en la figura anterior las fuerzas que actúan sobre la caja son la fuerza externa $\vec{F}$, la fuerza Normal $\vec{N}$, el peso $m\vec{g}$ y la fuerza de roce $\vec{f_r}$

El trabajo realizado por el peso y la fuerza normal es nulo debido a que estas son perpendiculares a la dirección de desplazamiento. Así:

$$W_{mg} = W_N = 0$$

Por otro lado, el trabajo realizado por la fuerza aplicada por el operario es

$$w = F \cdot d \ \cdot cos(0) = 200 \cdot 6 = 1200\, J$$

Y el trabajo hecho por la fuerza de roce es

$$W = -\vec{f_r} \cdot \vec{d}$$

donde $f_r = \mu_c N = \mu_c \cdot mg = 0{,}25 \cdot 40 \cdot 9{,}8 = 98\, J$

luego, $W = f_r \cdot d \cdot cos(180) = -98 \cdot 6 = -588\, J$

7.2. Potencia mecánica

La potencia mecánica es un concepto transversal para todas las áreas de la mecánica, la química, la electricidad y otras áreas disciplinares. Esto significa que la potencia es una cantidad física que representa la utilización de la energía por unidad de tiempo en cualquiera de sus formas.

También puede ser entendida como la rapidez con la cual se realiza el trabajo al aplicar una fuerza sobre un cuerpo, y si la fuerza es constante, entonces se operacionalmente se define como

$$P = \frac{W}{\Delta t} \qquad \textit{(Joule/s)} \qquad (7.4)$$

En el sistema internacional la unidad de potencia es $\frac{Joule}{segundos} \ := \ Watt$

Para la potencia también es común expresarla en caballos de fuerza (hp) y la equivalencia con la unidad de watt es: $1\ hp \approx 746\ watt$

Ejemplo 7.2

Una grúa levanta una carga de 4 toneladas una altura de 20 m en 10 segundos a rapidez constante. ¿Cuál es la potencia del motor?

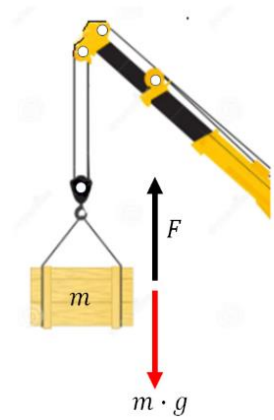
Solución

Si la rapidez es constante, la aceleración es nula y entonces la segunda Ley de Newton queda:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} = \vec{0} \qquad (7.5)$$

Esto implica que en la dirección vertical (Figura 7.6):

Figura 7.6



$$F - m \cdot g = 0 \qquad (7.6)$$

Luego la fuerza aplicada por la grúa debe ser igual al peso de la carga. El trabajo realizado por la fuerza al levantar la carga 20 m es

$$W = F \cdot d = (mg) \cdot d = (2000 \cdot 9{,}8) \cdot 20$$
$$= 784.000\ Joule$$

Y de la ecuación

$$P = \frac{W}{t} = \frac{784000}{10} = 78400\ watt = 78{,}4\ Kw$$

Potencia que expresada en hp y sabiendo que $1\ hp = 746\ watt$, entonces:

$$P = \frac{78.400\ watt}{746\ \frac{watt}{hp}} = 105\ hp$$

Ejemplo 7.3

Un atleta levanta una barra de masa 50 Kg una distancia de 1,5 m. considere que en promedio la fuerza muscular aplicada es constante. Encuentre la potencia desarrollada en los siguientes casos.

a) La barra sube con rapidez constante y tarda 1,3 segundos en llegar a la parte más alta.

Solución

Como la rapidez de subida es constante, entonces como en el ejemplo anterior la, la fuerza muscular aplicada es igual al peso de la barra, esto es

$$F = m \cdot g = 50 \cdot 9{,}8 = 490\ Newton$$

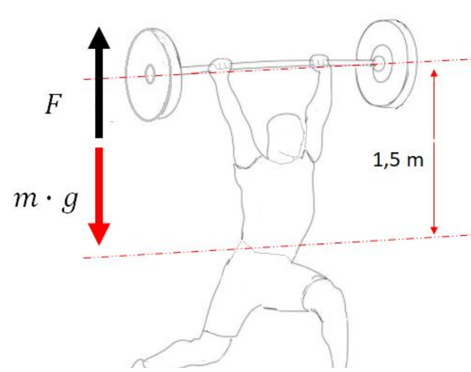
Y el trabajo de la ecuación (7.1)

$$W = F \cdot d = 490 \cdot 1{,}5 = 735\ Joule$$

De la expresión (7.4) para potencia:

$P = \frac{W}{t} = \frac{735}{1{,}3} = 565{,}4\ \ watt$ y en hp es

Figura 7.7



Adaptado de Simple Line, s.f., Adobe Stock.

$$P = \frac{565{,}4\ (watt)}{746\ \left(\frac{watt}{hp}\right)} = 0{,}76\ hp$$

b) La barra sube en promedio de 4 m/s^2 y tarda 1,3 segundos en llegar a la parte más alta.

Solución

De la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} \quad \rightarrow F - mg = \ ma \quad \rightarrow F = m \cdot (g + a) = 50 \cdot (9{,}8 + 4) = 690\ Newton$$

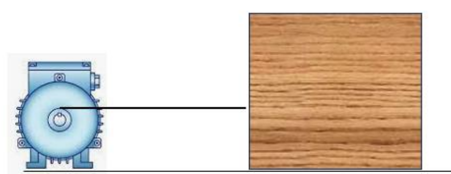
Luego el trabajo es $W = Fd = 690 \cdot 1{,}5 = 1.035\ Joule$

Y la potencia es

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1.035}{1{,}3} = 796{,}2\ \ watt$$

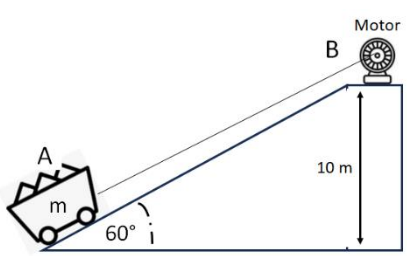
Actividades

1. Determine la potencia perdida por un motor al arrastrar un bloque de masa 60 Kg sabiendo que el coeficiente de roce cinético es de 0,6 y el bloque se desplaza con rapidez constante de 10 m/s.



2. Un carro se arrastra por un plano inclinado (60°) desde la parte más baja (A) hasta llegar a la parte más alta del plano (B), para tal efecto, se utiliza un motor eléctrico. La masa del carro es de m = 80 Kg y parte del reposo de la parte más baja llegando a la más alta con una rapidez de 2 m/s. Desprecie las fuerzas de roce y encuentre:

a) el trabajo realizado por el motor.
b) la potencia desarrollada por el motor en hp.



CAPÍTULO 8: TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Resumen

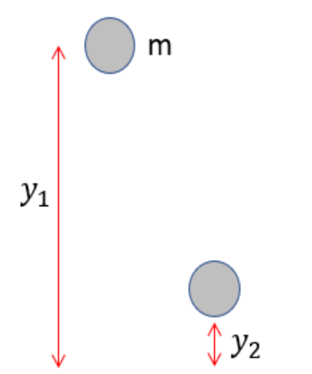
En esta unidad, se revisa el trabajo hecho por la fuerza de gravedad sobre un cuerpo y se define la energía potencial gravitatoria. Luego se evalúa el trabajo de una fuerza sobre un cuerpo atendiendo al cambio de su rapidez, y se define la energía cinética de un cuerpo. De este modo, se establece el teorema del trabajo y la energía que dice que el trabajo total realizado sobre un cuerpo es igual al cambio de su energía cinética.

8.1. Trabajo hecho por la gravedad

La gravedad interactúa con los cuerpos de modo que estos experimentan la fuerza peso, la que los acelera hacia el centro de la Tierra. Para evaluar el trabajo realizado, suponemos que existe un cuerpo de masa m que está a una altura de inicial y_1 y en reposo. Posteriormente, se libera y se considera el instante en el cual se encuentra a una altura y_2. La distancia que ha caído el cuerpo es

$$d = (y_1 - y_2) \qquad (8.1)$$

Figura 8.1



Y la fuerza peso que actúa sobre el cuerpo es el peso que viene dado (escalarmente) por

$$F = mg \qquad (8.2)$$

Luego el trabajo realizado por el peso según la expresión (7.1) es

$$W = F \cdot d = (m \cdot g) \cdot d = mg \cdot (y_1 - y_2) \qquad (8.3)$$

Notemos que el trabajo es positivo dado que la fuerza peso es paralela al desplazamiento.

Distribuyendo los términos, la expresión (8.3) queda

$$W = mgy_1 - mgy_2 \qquad (8.4)$$

Y, en este punto, se define la energía potencial gravitatoria como

$$W = -\Delta E_{pot} \qquad (8.5)$$

La energía potencial tiene las mismas unidades que el trabajo, esto es, en el S.I. es el Joule. La expresión (8.5) significa que, para realizar un cambio en altura de un cuerpo, se debe realizar un trabajo cuyo valor numérico es el negativo del valor en el cambio de le energía potencial.

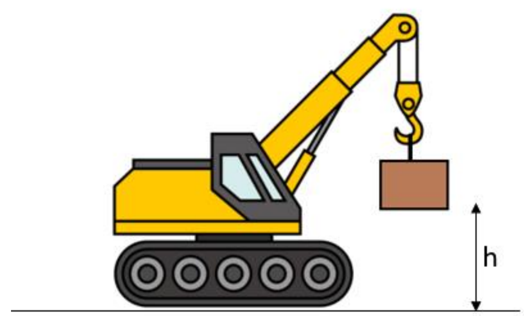
Ejemplo 8.1

Una grúa levanta una carga de 500 Kg hasta una altura de h = 5 m. Encuentre:

a) El trabajo realizado.

b) La potencia útil desarrollada por el motor de la grúa. Si la carga sube con rapidez constante de 2 m/s.

Figura 8.2



Adaptada de dak, s.f., Illustoon.

Solución

a) El trabajo hecho por la grúa se relaciona al cambio de energía potencial de la carga. Esto es

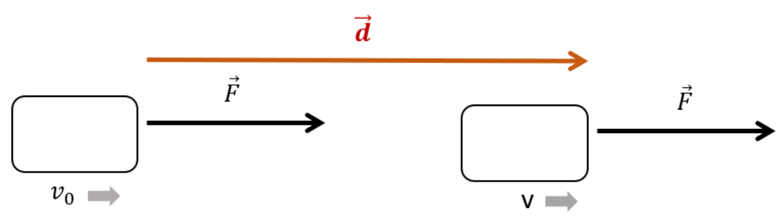
$$W = mg \cdot (y_1 - y_2) = 500 \cdot 9{,}8 = 4900\,J$$

b) Si la carga sube con rapidez constante, entonces la aceleración es nula (recordar que la segunda ley de Newton establece que la fuerza que ejerce la grúa es igual al peso de la carga). Lo anterior debido a que solo existe aceleración (modificación del vector velocidad con respecto al tiempo) cuando la suma de todas las fuerzas externas que se aplican sobre el objeto, la fuerza neta, es el vector nulo.

8.2. Teorema del trabajo y la energía

Sobre un cuerpo de masa **m** actúa una única fuerza de magnitud **F** paralela al desplazamiento. Inicialmente, tiene una rapidez de v_o y después de un tiempo v. Además, durante ese tiempo el cuerpo se mueve una distancia **d**.

Figura 8.3



Ahora consideramos la segunda Ley de Newton donde

m: masa del cuerpo

a: aceleración

multiplicando por la distancia **d** a ambos lados de la expresión anterior, se tiene

$$W = F \cdot d = m\,a \cdot d \qquad (8.6)$$

En esta última expresión, el término $F \cdot d$ corresponde al trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo. De este modo, se obtiene que

$$W = ma \cdot d \qquad (8.7)$$

De cinemática se tiene que la expresión para la velocidad final de un cuerpo que acelera y en la cual no aparece el tiempo es

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)$$

El término $(x - x_0)$ corresponde a la distancia recorrida o magnitud del vector desplazamiento.

De la expresión anterior se obtiene la aceleración como $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$

Y, reemplazando en la expresión (8.6), se tiene

$$W = m \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2d} \cdot d$$

Al simplificar y reordenar el trabajo realizado queda como

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (8.8)$$

En este punto, se define la energía cinética o de movimiento como

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

Donde m: masa del cuerpo y v: rapidez.

La unidad de medida de **K** en el S.I. es el Joule. Así, la expresión (8.7) puede escribirse como

$$W = K_{final} - K_{inicial} = \Delta K \qquad (8.9)$$

lo que se expresa también en Joule.

En conclusión:

La cantidad de trabajo W realizado por una fuerza neta externa F sobre un cuerpo que se desplaza es igual al cambio de energía cinética ΔK

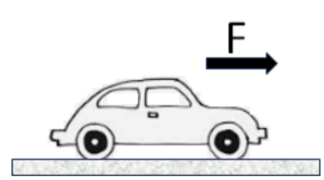
Si sobre el cuerpo actúan más de una fuerza, entonces el trabajo W en (8.9) corresponde al trabajo total hecho sobre el cuerpo sumado el que corresponde a cada fuerza o el trabajo realizado sobre el objeto por la fuerza neta externa.

Ejemplo 8.2

Un auto de masa 1500 Kg acelera a razón constante de 0 a 100 Km/hora en 5 segundos. Suponiendo que la fuerza aplicada por el motor es constante, encuentre:

a) El trabajo realizado por el motor.
b) La potencia promedio desarrollada por el motor.
c) La fuerza promedio equivalente que ejerce el motor.

Figura 8.4



Solución

Primero transformamos 100 Km/hora a m/s:

$$100\frac{Km}{hr}\cdot\left(\frac{1000\ m}{1Km}\right)\left(\frac{1\ hora}{3600\ seg}\right)=27{,}7\ m/s$$

a) Usando (8.9) con v=27,7 m/s y v_0=0, se obtiene:

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\cdot 1500\cdot 27.7^2-0=575468\ J$$

b) Como el cambio de rapidez se produjo en un tiempo de 5 segundos, entonces

$$P=\frac{W}{t}=\frac{575468}{5}=115.094\ watt$$ = 115094 watt

y como $1\ hp=746\ watt$, la potencia queda

P= 154.3 hp

c) Se obtiene la aceleración, así

$$a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{27.7-0}{5}=5.5\ m/s^2$$

y aplicando la segunda ley de Newton:

$$F=m\cdot a=1500\cdot 5{,}5=8250\ N$$

Ejemplo 8.3

Un auto de masa 1500 Kg y la potencia máxima del motor es de 200 hp. Si parte del reposo:

a) ¿Qué velocidad tiene al cabo de 5 segundos?

b) Encuentre la fuerza promedio que aplica el motor.

Solución

a) Como se conoce la potencia, al usar la expresión (7.4), encontramos que el trabajo realizado a los 5 segundos y expresando la potencia en watt:

$$(1\ hp = 746\ watt)$$

$P\ = 200\ hp \cdot 746\left(\frac{watt}{hp}\right) = 149.200\ watt$

Y como $P = \frac{W}{t}\ \rightarrow W = P \cdot t = 149.200 \cdot 5 = 746.000\ watt$

Y usando el teorema del trabajo y energía (8.9)

$$W = \frac{1}{2}mv^2\ -\ \frac{1}{2}mv_0^2$$

$746000 =\ \frac{1}{2}1500 \cdot v^2 - 0\ \rightarrow$ v= 31,5 m/s

b) La aceleración es $a = \frac{v-v_0}{t} = \frac{31{,}5-0}{5} = 6{,}3\ m/s^2$

Usando la segunda ley de Newton, se tiene

$$F = m \cdot a = 1500 \cdot 6{,}3 = 9450\ (N)$$

Actividades

1. Se eleva una carga de masa m = 100 Kg a una altura de 5 metros a rapidez constante con un motor de potencia 2500 Watt. Encuentre el tiempo que toma la maniobra.
   Respuesta: 1,96 s

2. Un motor de 0,2 hp arrastra un carro de masa 120 Kg sobre una superficie horizontal. Si parte del reposo, encuentre el tiempo para el cual la caja adquiere una rapidez de 4 m/s. En este ejercicio, ignore la fuerza de roce.
   Respuesta: 6,43 s

CAPÍTULO 9: ENERGÍA MECÁNICA Y SU CONSERVACIÓN

Resumen

En esta unidad se considera la conservación de energía mecánica de un sistema y las condiciones bajo las cuales esta permanece constante. Se aborda el concepto de energía mecánica y se analizan casos en donde aparecen las tres formas de energía, cinética potencial gravitatoria y elástica.

9.1. Energía mecánica

Considerando el estado de movimiento de un cuerpo (rapidez) y su posición (altura) respecto a cierto nivel de referencia, la energía mecánica E_M corresponde a la suma de la Energía Cinética y Energía Potencial gravitatoria.

$$E_M = K + \qquad (9.1)$$

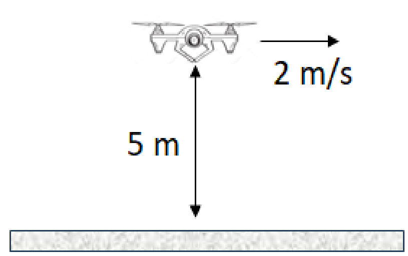
Donde $K = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética y $U = mgh$ es la energía potencial gravitatoria. Así:

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh} \qquad (9.2)$$

Ejemplo 9.1

Un dron de masa 3 Kg se mueve con una rapidez de 2 m/s y a una altura de 5 metros respecto del suelo.

Figura 9.1



Solución

Siguiendo (9.2), su energía mecánica es

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = 153 \text{ J}$$

9.2. Conservación de la energía mecánica

En general, todos los sistemas mecánicos están expuestos a la acción de fuerzas disipativas que se traducen en una pérdida de energía y, en Mecánica, tenemos como ejemplo a la fuerza de roce. En este último caso, las superficies dentro del sistema que están en contacto y en movimiento relativo entre sí, experimentan un aumento de temperatura y, en consecuencia, la energía final del sistema es menor que la inicial.

En ausencias de fuerzas disipativas, o bien si estas son despreciables, la energía mecánica se conserva. Esto es:

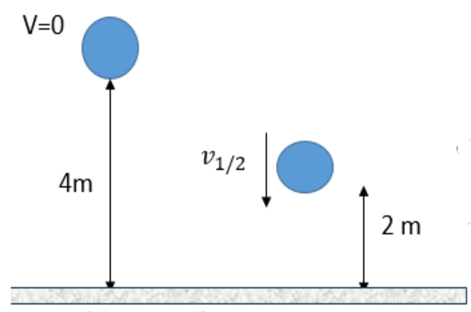
$$\boxed{E_M = K + U = Constante} \qquad (9.3)$$

Ejemplo 9.2

Un cuerpo de masa **M** se deja caer desde una altura de 4 m. Despreciando los efectos de la fricción con el aire, encuentre su rapidez cuando se encuentra a 2 metros del suelo. (g=9,8 m/s^2).

Solución

En este caso, la masa es irrelevante en la resolución debido a que en la expresión final, esta se simplifica:



$$Energía\ mecánica: \ E_M = K + U$$

$Energía\ inicial: \ E_i = 0 +$ M g h=9,8 ·4 ·M = 39,2·M

$Energía\ finnal: \ E_f = \frac{1}{2} M\, v^2{}_{1/2} + M \cdot 10 \cdot 2$

$$\text{En ausencia de fuerzas disipativas: } E_i = E_f$$

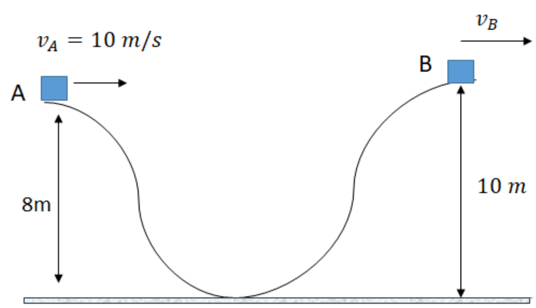
$40\ M = \frac{1}{2} M\, v^2{}_{1/2} + 20M$

De donde se obtiene

$$v_{1/2} = \sqrt{(40 - 20) \cdot 2} = 6.32\ m/s$$

Ejemplo 9.3

Un cuerpo de masa m = 100 Kg se mueve a lo largo de la pista que muestra la Figura 9.3. Cuando pasa por el punto A lo hace con una rapidez de 10 m/s y a una altura de 8m. Encuentre su rapidez cuando pasa por el punto B que está a una altura de 10m. (Desprecie la fuerza de roce).



Solución

$Energía\ mecánica$: $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

$Energía\ en\ el\ punto\ A$: $E_A = \frac{1}{2}100 \cdot 10^2 + 100 \cdot 9{,}8 \cdot 8 = 12.840\ J$

$Energía\ ene\ el\ punto\ B$: $E_B = \frac{1}{2}100 \cdot {v_B}^2 + 100 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 50{v_B}^2 + 9800$

$Conservación\ de\ la\ energía$: $E_A = E_B$

De donde

$$50{v_B}^2 + 9800 = 12840$$

Despejando para v_B

$$v_B = \sqrt{\frac{3040}{50}} = 7{,}8\ m/s$$

9.3. Principio de conservación de la energía con roce

Como se mencionó anteriormente, cuando existe una fuerza disipativa en particular el roce, entonces parte de la energía mecánica se disipa en forma de calor.

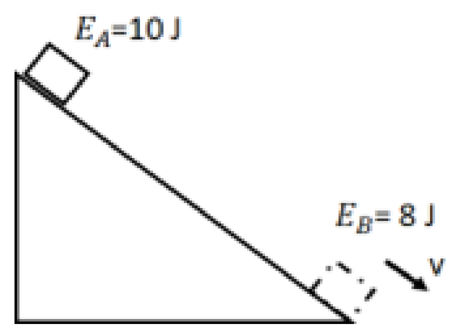
Bajo esta condición, el principio de conservación de energía queda como

$$\boxed{E_{inicial} = E_{final} + |W_{roce}|} \quad (9.4)$$

Una justificación de la expresión anterior la ilustra el siguiente ejemplo (Figura 9.4).

Un bloque desliza por un plano inclinado en donde existe roce entre el cuerpo y el plano. Si la energía mecánica en el punto más alto es 10 J y en la parte más baja 8 J se tiene que $E_A > E_B$, por lo que ha habido una pérdida de energía. Esta pérdida corresponde al trabajo realizado por la fuerza de roce.

Figura 9.4

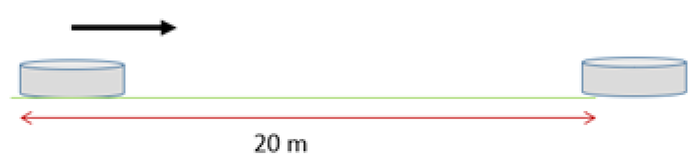


La energía en B se ha reducido en una cantidad positiva de 2 Joules, esto es $10 = 8 + |W_{roce}|$. El término en valor absoluto $|W_{roce}|$ corresponde a la magnitud del trabajo realizado por la fuerza de roce.

Ejemplo 9.4

Un disco de 5 Kg es lanzado sobre una pista de hielo con rapidez 4 m/s y se detiene por efecto del roce a los 20 metros. ¿Cuál es el coeficiente de roce entre el disco y la pista de hielo?

Figura 9.5



Solución

Usando la expresión (9.4) con

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot 4^2 = 40\ J$$

$$E_f = 0$$

El trabajo hecho por la fuerza de roce es $W_r = -f_{roce} \cdot d = -(\mu_c N) \cdot d$ (9.5)

Donde $N = mg = 5 \cdot 9{,}8 = 49\ (N)$

$$W_r = -(\mu_c \cdot 49) \cdot 20 = -980\ \mu_c$$

Al reemplazar estas cantidades en (9.5) y tomar el valor absoluto del trabajo hecho por el roce W_r

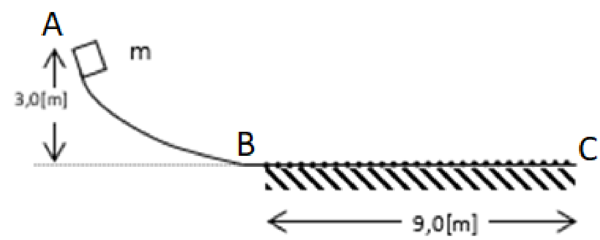
$$40 = 0 + \ 980\ \mu_c$$

se obtiene que

$$\mu_c = \frac{40}{980} = 0{,}04$$

Ejemplo 9.5

Figura 9.6



Un bloque de masa 2,0 Kg, inicialmente en reposo, desciende desde una altura de 3,0 metros por una rampa sin roce como se muestra en la Figura 9.6. Luego, se desliza sobre un plano horizontal rugoso hasta detenerse. Después de recorrer 9,0 metros, encuentre:

a) La rapidez del bloque cuando llega al punto más bajo de la rampa.

b) El trabajo que realiza la fuerza de roce sobre el bloque.

c) El coeficiente de roce entre el plano rugoso y el bloque.

Solución

a) La energía en el punto más alto es

$$E_A = \ mgh = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 3 = 58{,}8\, J$$

Y en el punto (B) es

$$E_B = \frac{1}{2} m {v_B}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 \ = v^2$$

Como en el tramo AB no existe roce la energía se conserva, esto es

$$E_A = E_B \quad \rightarrow \ v^2 \ = 58{,}8$$

$$v = \sqrt{58{,}8} = 7{,}7\ m/s$$

b) El trabajo hecho por el roce se obtiene a partir de la expresión

$$E_A = E_C + |W_r|$$

La energía en el punto C es nula: $E_C = 0$

Luego de (9.4), el trabajo hecho por la fuerza de roce es

$$58{,}8 = 0 + |W_{roce}| \rightarrow |W_{roce}| = 58{,}8\,J \;\; \rightarrow \;\; W_{roce} = -58{,}8\,J$$

c) Como el trabajo hecho por el roce en el tramo de longitud d=9 m viene dado por la expresión (8.6):

$$W_{roce} = -\mu N d \;\; \text{con} \;\; N = mg = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6\,N$$

Y como de (b) $W_{roce} = -58{,}8\,J$, entonces

$$-\mu \cdot 19{,}6 \cdot 9 = -58{,}8 \;\; \text{y se obtiene}$$

$$\mu = 0{,}33$$

9.4. Energía potencial elástica

Consideremos un sistema de un cuerpo unido al extremo de un resorte de constante elástica k. Al aplicar una fuerza de magnitud F sobre un extremo del resorte, este opone una fuerza F_k, la que está dada por la Ley de Hooke (Figura 9.7). Esta fuerza es proporcional al estiramiento o compresión del resorte y la constante de proporcionalidad es la constante elástica K, que es una medida de la rigidez del resorte.

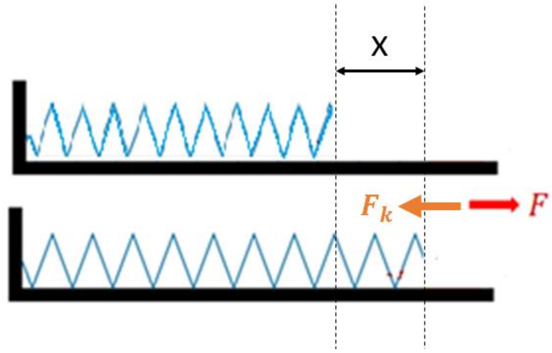
$$F_k = -k \cdot x \qquad (9.6)$$

K: constante elástica (Newton/metro)

X: estiramiento del resorte (metro)

El signo negativo que aparece en la expresión es debe a que la fuerza que aplica el resorte es siempre opuesta a la fuerza externa F aplicada, ya sea para estirar o comprimir el resorte.

Figura 9.7

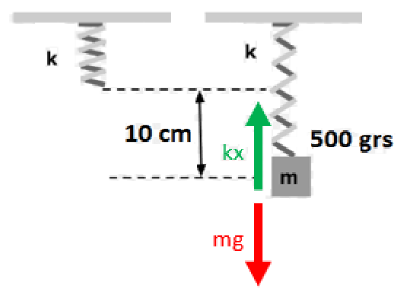


Ejemplo 9.6

Un cuerpo de masa 500 gramos está suspendido desde uno de los extremos de un resorte. Si el estiramiento que produce sobre el resorte es de 10 cm.

Encuentre la constante elástica k del resorte.

Figura 9.8



Solución

La fuerza externa aplicada sobre el resorte corresponde al peso del cuerpo. En magnitud debe ser igual a la fuerza ejercida por el resorte. Esto es

$$F = mg = kx$$

De donde $k = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}5\ (Kg)\cdot 9{,}8(\frac{m}{s^2})}{0.1\ (m)} = 49\ N/m$

9.5. Energía potencial elástica

La energía potencial elástica representa la capacidad de generar movimiento debido a la compresión o estiramiento, en general deformación, que experimenta de un objeto que posee la propiedad de restituir su forma original en cierta medida.

9.5.1. Trabajo hecho por una fuerza externa sobre un resorte

Estirar un resorte, involucra una fuerza variable, luego no es posible usar directamente la expresión $W = F \cdot d$ donde **F** es la fuerza aplicada y **d** la distancia. En la expresión anterior la fuerza F es constante.

Lo que se hace es considerar una pequeña variación de x (dx) de modo que en ese intervalo diferencial (Figura 9.9), la fuerza prácticamente es constante y, por lo tanto, el elemento diferencial de trabajo realizado dW viene dado por

$$dW = Fd \qquad (9.7)$$

Aquí, la fuerza F aplicada es igual en magnitud a la fuerza ejercida por el resorte $F = kx$, así:

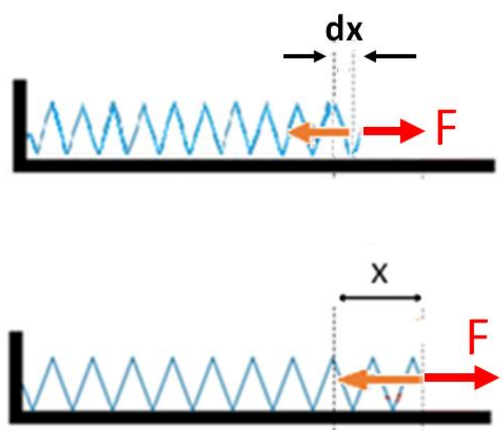
$$dW = Kx\,dx$$

Si integramos la expresión anterior entre x=0 y x obtenemos el trabajo total realizado sobre cada pequeño incremento de x.

Finalmente, el trabajo queda expresado de la siguiente manera:

$$W = \int_0^x K\,x\,dx \;\rightarrow\; W = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \qquad (9.8)$$

Figura 9.9



El trabajo realizado sobre el resorte pasa a ser una forma de energía potencial o latente denominada energía potencial elástica U_k de modo que:

$$\boxed{U_k = \frac{1}{2}\,k\,x^2} \qquad (9.9)$$

Ejemplo 9.7

Un resorte de constante elástica k = 10 N/m se estira 10 cm. Encuentre la energía potencial elástica final del resorte.

Solución

Usando la expresión (9.9) con x= 0,1 metro, se obtiene

$$U_k = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot\ 0.1^2 = 0{,}05\, J$$

Si dentro de un sistema aparece un resorte participando activamente de la dinámica del movimiento, entonces la expresión para la energía mecánica queda expresada de la siguiente manera

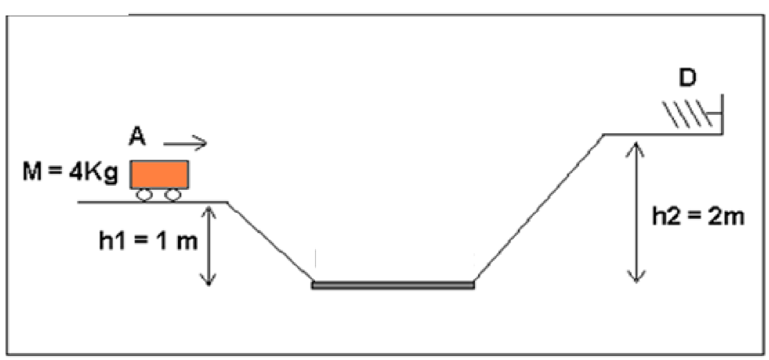
$$\boxed{\begin{aligned} E_M &= K + U_g + U_k \\ E_M &= \tfrac{1}{2} m v^2\ + mgh\ +\ \tfrac{1}{2} k x^2 \end{aligned}} \qquad (9.10)$$

Ejemplo 9.8

En el sistema de la Figura 9.10, un carro de masa 4 Kg pasa por A con una rapidez v_A de modo que en D comprime a un resorte de constante k=10 N/m en 8 cm (compresión máxima). Encuentre la rapidez del carro al pasar por el punto A (v_A)c

Para este ejercicio, ignore las fuerzas de roce.

Figura 9.10



Solución

La energía del carro cuando pasa por A es:

$$E_A = \frac{1}{2} m{v_A}^2 + mgh_A = \frac{1}{2} \cdot 4{v_A}^2 + 4 \cdot 9{,}8 \cdot 1 = 2v^2 + 39{,}2$$

La energía mecánica en D y considerando que en compresión máxima la rapidez es nula, además del dato x= 0,08 (m), es:

$$E_D = mgh + \frac{1}{2}kx^2 = 4 \cdot 9{,}8 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}08^2 = 78{,}4\,J$$

En ausencia de roce la energía se conserva.

Luego:

$E_A = E_D$, quedando

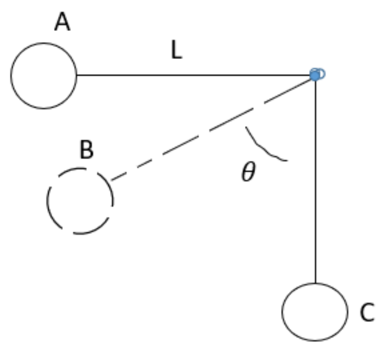
$$2v^2 + 39{,}2 = 78{,}4$$

De donde

$$v_A = 4{,}47\ m/s.$$

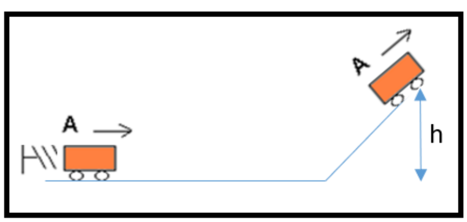
Actividades

1. Un péndulo que inicialmente se encuentra en reposo en el punto A es liberado de modo que describe una trayectoria circular. Si el largo de la cuerda es L. Encuentre:
   a) la rapidez cuando pasa por el punto más bajo C.
   b) la rapidez cuando pasa por el punto B en el momento de formar un ángulo θ con la vertical.



Respuesta: $a)\ v = \sqrt{2gL}\quad b)\ v_B = \sqrt{2gLcos\theta}$

2. En el sistema de la figura, un carro de masa M = 50 Kg comprime 12 cm a un resorte de constante elástica k=1000 N/m. Si se libera al carro en A. Encuentre la altura máxima **h** que alcanza el carro antes de devolverse.



Respuesta: h=0,014 m.

CAPÍTULO 10: COLISIONES

Resumen

En esta unidad se analizan distintos tipos de colisiones básicas en la mecánica Newtoniana y se define la cantidad denominada *coeficiente de restitución*, el que representa un indicador de si la colisión ha sido elástica, inelástica o completamente inelástica. También se considera la pérdida de energía que experimenta el sistema físico que ocurre durante una colisión.

10.1. Colisiones en 1 dimensión

Iniciamos el presente capítulo con el estudio mecánico del fenómeno de colisión entre dos objetos restringidos a un espacio unidimensional. Durante una colisión se producen varios hechos físicos importantes, como el intercambio de energía entre los cuerpos involucrados, el intercambio de energía entre estos y el ambiente que los rodea (colisión no conservativa), la deformación que sufren, el cambio que sufren los vectores de velocidad respectivos en comparación a su dirección y magnitud previas a la colisión, entre otras cosas.

10.2. Coeficiente de restitución (e)

Una forma de caracterizar los diferentes tipos de colisiones es relacionar las velocidades relativas antes y después del choque. Se define el coeficiente de restitución **e** como el cociente entre las *velocidades relativas* antes y después del choque.

Figura 10.1

Antes de la colisión   Después de la colisión

Se define el coeficiente de restitución como

$$e = \frac{v'_2 \ - v'_1}{v_1 - v_2} \tag{10.1}$$

El coeficiente de restitución es un número adimensional que identifica el tipo de choque, y toma valores en el intervalo 0 a 1.

a) Choque completamente inelástico (e = 0)
b) Choque elástico (e = 1)
c) Choque inelástico (0 < e < 1)

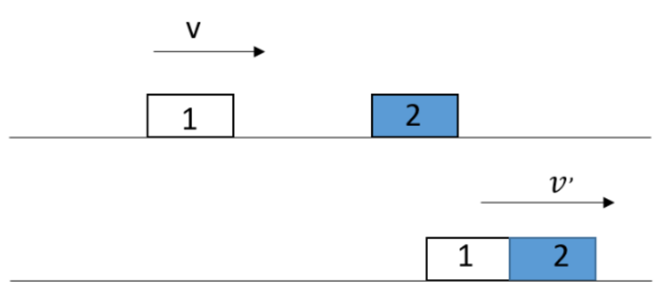
10.2.1. Choque completamente inelástico (e = 0)

En un choque completamente inelástico, los cuerpos siguen juntos después del choque y durante tal evento ocurre pérdida de energía debido a efectos de deformación o ligadura.

Ejemplo 10.1

Un bloque 1 tiene una velocidad v y choca a un bloque 2 inicialmente en reposo. Si las masas de ambos bloques son iguale y quedan unidos después de la colisión, entonces el coeficiente de restitución es $e = 0$.

Figura 10.2



Solución

En efecto:

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = \frac{0}{v} = 0 \qquad (10.2)$$

Durante el choque, las fuerzas de interacción son *internas*, de modo que el momento lineal se conserva y el momento inicial es

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_1$$

Y justo después del choque es

$$\vec{P}_{final} = \vec{P}_{1+2}$$

Así:

$$P_i = P_f \quad \rightarrow \quad 2mv' = mv$$

De donde se obtiene para la rapidez final del sistema lo siguiente:

$$v' = \frac{v}{2}$$

Por otro lado, la energía del sistema antes del choque atribuida al movimiento del bloque 1 es

$$E_i = \frac{1}{2}\, mv^2$$

Y la energía final justo después del choque es

$$E_f = \frac{1}{2}\, mv'^2 + \frac{1}{2}\, mv'^2 = mv'^2 = \frac{1}{4} mv^2$$

De modo que $E_f < E_i$

La energía final es menor que la inicial por lo que ha ocurrido una pérdida de energía del sistema de dos bloques durante la colisión.

10.2.2. Choque elástico (e = 1)

En un choque completamente elástico, el coeficiente de restitución es e=1 y durante el choque la energía cinética se conserva.

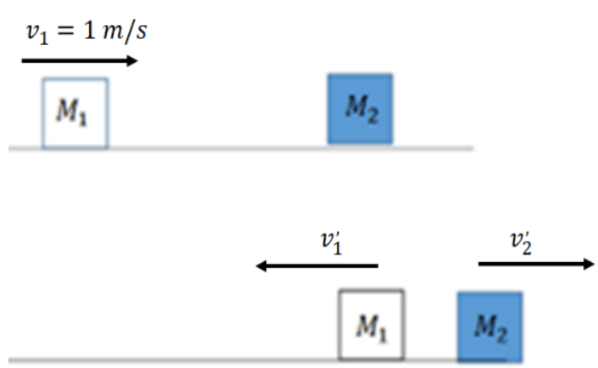
Ejemplo 10

Una esfera de masa M_1 = 0,5 Kg inicialmente tiene una rapidez de 1 m/s y choca a una segunda esfera de masa M_2 = 0,8 Kg en reposo. Si el choque es elástico, encuentre las velocidades de las esferas justo después del choque y demuestre que la energía permanece constante antes y después del choque.

Solución

Como las fuerzas durante el choque son internas, el momento lineal se conserva de modo que

$$\vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final} \qquad (10.3)$$



$$\vec{p}_{inicial} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{p}_{inicial} = 0{,}5 \cdot 1\,\hat{\imath} + 0{,}8 \cdot 0\,\hat{\imath} = 0{,}5\,\hat{\imath}\ m/s$$

$$\vec{p}_{final} = m_1\overrightarrow{v_1'} + m_2\overrightarrow{v_2'} = 0{,}5 \cdot v_1' + 0{,}8 \cdot v_2' \quad \text{en dirección del eje x}$$

Luego (10.3) escalarmente queda $0{,}5 \cdot v_1' \;+ 0{,}8 \cdot v_2' = 0{,}5$

Como se indica que la colisión es elástica, entonces e = 1 y:

$$e = \frac{v'_2 \; - v'_1}{v_1 - v_2} = 1$$

$\frac{v'_2 \, - v'_1}{1-0} = 1 \;\rightarrow v'_2 \;= (1 + v'_1\,)$

Luego, de la expresión

(2) $0{,}5 \cdot v_1' \;+ 0{,}8 \cdot (1 + v'_1\,) \;= 0{,}5$

$v_1' = -0{,}23\,\frac{m}{s} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{v_1'} = \; -0{,}23\,\hat{\imath}\; m/s$ (10.4)

y $v'_2 \;= (1 - 0{,}23) = 0{,}77\,\frac{m}{s} \;\rightarrow\; v'_2 \;=\; 0{,}77\,\hat{\imath}\; m/s$

Por otro lado, la energía inicial del sistema es

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot (1^2) + 0 = 0{,}25\, J$$

Y la energía final es

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot (-0{,}23^2) + \frac{1}{2} 0{,}8 \cdot (0{,}77^2) = 0{,}25\, J$$

Entonces, $E_i = E_f$

Luego, podemos observar que la energía final es igual a la inicial. Esto ocurre debido a que el choque es elástico.

10.2.3. Choque inelástico (0 < e < 1)

En un choque elástico el momento lineal se conserva y ocurre pérdida de energía. El coeficiente de restitución es tal que 0 < e <1, es un evento intermedio entre un choque elástico y uno completamente inelástico.

Ejemplo 10.3

Un bloque de masa M_1= 10 Kg se mueve con rapidez 4 m/s y choca frontalmente a un bloque de masa M_2= 5 Kg que se encuentra en reposo. Después del choque M_1 se mueve con rapidez 2 m/s y M_2 con 3.5 m/s. Encuentre el coeficiente de restitución e.

Solución

Tomando $v_1 = 4\ \frac{m}{s}\ \ y\ \ v_2 = 0\ \ \frac{m}{s}$ y para después de la colisión $v_2' = 3.5\ \frac{m}{s}\ \ y\ \ v_1' = 2\ \frac{m}{s}$ como las velocidades finales:

$$e = \frac{v'_2\ - v'_1}{v_1 - v_2} = \frac{1.5}{4} = 0.375$$

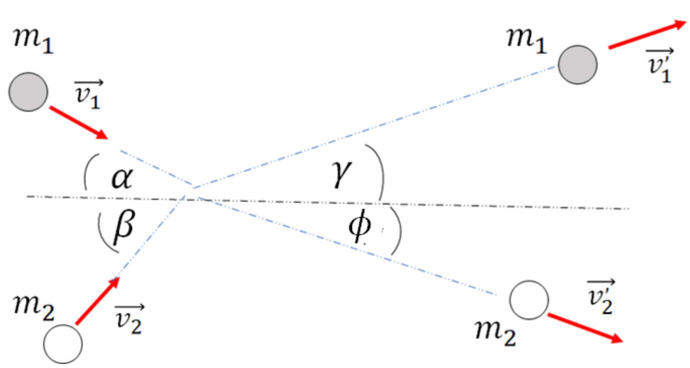
Lo cual es consistente con la definición brindada para este tipo de colisión.

10.3. Colisiones en dos dimensiones

La cantidad de movimiento es un vector, de modo que, cuando se trata de choques en dos dimensiones, la conservación de momento lineal se cumple en ambos ejes de coordenadas.

Por ejemplo, en la siguiente figura se presenta el choque de dos cuerpos de masa m1 y m2 y con velocidades $\overrightarrow{v_1} = v_{1x}\,\hat{\imath} + v_{1y}\,\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{v_2} = v_{2x}\,\hat{\imath} + v_{2y}\,\hat{\jmath}$. Justo después del choque las velocidades son $\overrightarrow{v_1'} = v_{1x}'\,\hat{\imath} + v_{1y}'\,\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{v_2'} = v_{2x}'\,\hat{\imath} + v_{2y}'\,\hat{\jmath}$.

Figura 10.4



La conservación del momento lineal indica que

$$(\vec{P}_{sistema})_{inicial} = (\vec{P}_{sistema})_{final}$$

Esto es $\quad m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v_1'} + m_2\overrightarrow{v_2'}$

Y para el caso de la Figura 10.4, en término de coordenadas, es equivalente a:

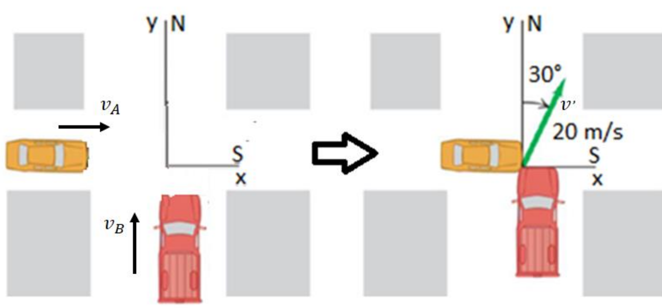
$$m_1v_1\, cos\, cos\,(\alpha)\; + m_2v_2\, cos\, cos\,(\beta) = \; m_1v_1'\, cos\, cos\,(\gamma)\; + m_2v_2'\, cos\, cos\,(\phi)$$

$$m_1v_1(\alpha)\; - m_2v_2(\beta) = \; m_1v_1'(\gamma)\; - m_2v_2'(\phi) \qquad (10.5)$$

Ejemplo 10.4

Dos vehículos colisionan en un cruce (ver Figura 10.5). Después del choque, los vehículos quedan enganchados y se mueven junto haca el este en dirección 30° con una rapidez de 20 m/s. Si la masa del auto rojo es de 900 Kg y de la camioneta amarilla es de 1500 Kg, encuentre las velocidades de ambos vehículos antes del choque.

Figura 10.5



Solución

El caso corresponde a un choque plástico o completamente inelástico. Ambos vehículos después del choque siguen juntos y por tanto tienen la misma velocidad.

Para el eje x, correspondiente a la dirección Este, se cumple que

$$900\; v_A = (900 + 1500)v' \cdot sen(30)$$

con $v' = 20\; m/s$

$$900\; v_A = (900 + 1500) \cdot 20 \cdot sen(30)$$

$$v_A = 26{,}7\; m/s$$

Y para el eje y, correspondiente a la dirección Norte, se tiene que

$$1500\; v_B = (900 + 1500)v' \cdot cos(30)$$

con $v' = 20\ m/s$

$$1500\ v_B = (900 + 1500) \cdot 20 \cdot cos(30)$$

$$v_A = 27{,}7\ m/s$$

Ejemplo 10.5

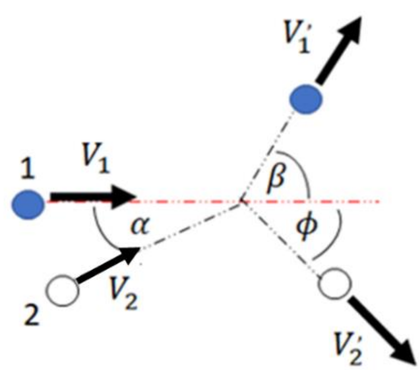
Dos cuerpos de masa m_1=200 Kg y m_2=100 Kg se encuentran en trayectoria de colisión. Donde:

$$v_1 = 3\frac{m}{s}\ \ ;\ \ v_2 = 1\frac{m}{s}\ \ ;\ \ \alpha = 53°\ ;\ \beta = 37°\ y\ \ \ v_1' = 2\ m/s$$

a) Encuentre la rapidez del cuerpo 2 después del choque y el ángulo Ø.

b) Determine de manera fundamentada a qué tipo de choque corresponde.

Figura 10.6



Solución

a) Como las fuerzas son internas, el momento lineal del sistema se conserva:

$$\vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final}$$

Para la componente x: $m_1v_1 + m_2v_2\ cos\ cos\ (\alpha)\ = m_1v_1'\ cos\ cos\ (\beta)\ + V_{2x}'$

Luego:

$$V_{2x}' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2\ cos\ cos\ (\alpha)\ - m_1v_1'\ cos(\beta)}{m_2}$$

$$V_{2x}' = \frac{200 \cdot 3 + 100 \cdot 1 \cdot cos\ cos\ (53)\ - 200 \cdot 2\ cos(37)}{100} = 3{,}41\ m/s$$

Para la componente y: $m_2 v_2(\alpha)\ = m_1 v_1'(\beta) + V_{2y}'$

Luego:

$$V_{2y}' = \frac{m_2 v_2(\alpha) - m_1 v_1'(\beta)}{m_2} = -1{,}61\ m/s$$

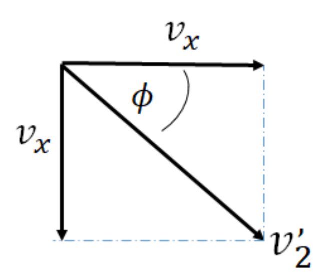
$$V_{2y}' = \frac{100 \cdot 1 \cdot (53)\ - 200 \cdot 2(37)}{100} = -1{,}61\ m/s$$

Y la rapidez es $v_2' = \sqrt{V_{2x}'^2 + V_{2y}'^2} = \sqrt{(3{,}41)^2 + (-1{,}61)^2} = 3{,}77\ m/s$

b) Para la determinación del ángulo se consideran las componentes x e y de v_2' de modo que

Figura 10.7

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{-1{,}61}{3{,}41}\right) = -25{,}27°$$



Para identificar el tipo de choque, se evalúan la energía antes y después del choque, así:

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}\ m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\ m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\ 200 \cdot 3^2 + \frac{1}{2}\ 100 \cdot 1^2 = 950\ J$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}\ m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}\ m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}\ 200 \cdot 2^2 + \frac{1}{2}\ 100 \cdot 3{,}77^2 = 464{,}2\ J$$

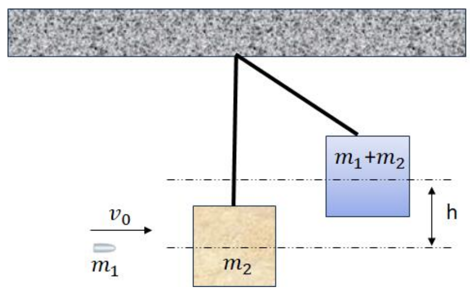
Entonces, la pérdida de energía es

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = 464{,}2 - 950 = -485{,}78\,J$$

Como la energía después de la colisión es menor que la energía inicial, hubo pérdida de energía por lo cual resulta en una colisión de tipo inelástica.

Actividades

1. Una forma de medir la rapidez de un proyectil de masa m_1 es el péndulo balístico, el que consiste en un bloque de madera de masa m_2. Luego de impactar la bala al bloque, está queda incrustada y el conjunto se pone en movimiento hasta alcanzar una altura h. Encuentre la rapidez del proyectil en términos de m_1, m_2 y h.

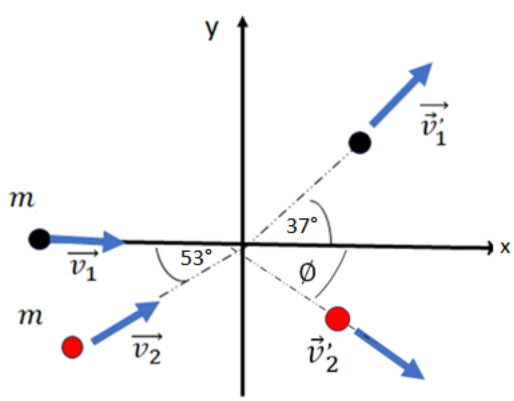


2. Dos partículas de igual masa colisionan de modo que la rapidez de la partícula 1 después del choque es de $v_1' = 2$ m/s en una dirección de $\beta = 37°$ con respecto al eje x.

   Si

$$v_1 = 3\frac{m}{s}, v_2 = 1\frac{m}{s}$$

   encuentre la rapidez v_2' y el ángulo ϕ después del choque.



CAPÍTULO 11: SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Resumen

En esta unidad se explora las interacciones entre partículas dentro de un sistema aislado. Dichas interacciones pueden ser fuerzas a distancia, tales como eléctrica, magnética gravitacional, así como también explosiones y choques. Se define el concepto de impulso y cantidad de movimiento y su utilidad al momento de evaluar fuerzas de interacción y el estado final de un sistema justo después de ocurrir una interacción entre los elementos del sistema. Se aborda el principio de conservación del momento lineal dentro de un sistema aislado el que aparece como una herramienta potente para resolver problemas aplicados a la ciencia e ingeniería.

11.1. Momento lineal

El concepto de momento lineal o cantidad de movimiento está relacionado con la propiedad de inercia de los cuerpos Esta inercia se manifiesta, por ejemplo, durante un salto desde una silla: al llegar al suelo se hace necesario doblar las rodillas. Otro ejemplo es que es más fácil detener una pelota de *ping-pong* que se desplaza a cierta velocidad que un automóvil a igual velocidad.

Un sistema de partículas puede entenderse como un conjunto de partículas pequeñas que se mueven en el espacio y, eventualmente, pueden interactuar entre sí frente a colisiones, fuerza elástica, fuerzas de ligadura, explosiones etc.

11.2. Cantidad de movimiento de una partícula

La cantidad de movimiento de una partícula es definida por la expresión vectorial

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \qquad (11.1)$$

$$m: Masa\ del\ cuerpo$$

$$\vec{v}\ :\ velocidad\ del\ cuerpo$$

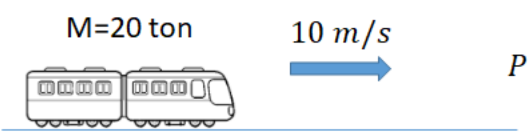
La unidad del momento lineal en el S.I. es Kg m/s.

Ejemplo 11.1

A continuación, se presenta la diferencia en cuanto a la cantidad de movimiento lineal (Momentum lineal) cuando dos objetos que se mueven a la misma velocidad difieren enormemente en cuanto a su cantidad de masa. Esto nos ayuda a visualizar el importante hecho de que, si bien el Momentum lineal depende del vector velocidad, la cantidad de masa define también la magnitud del vector Momentum.

Momento lineal de un par de carros de tren:

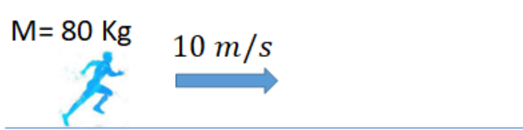
Figura 11.1



$$P = 20000 \cdot 10 = 2x10^5 \quad Kg\, m/s$$

Momento lineal de un corredor:

Figura 11.2



$$P = 80 \cdot 10 = 800 \;\; Kg\, m/s$$

Adaptado de Ekaterina Chernysheva, s.f., Dreamstime.

La diferencia de momento lineal entre los dos casos presentados es grande.

11.3. Impulso

El impulso se define como el producto entre la fuerza aplicada a un cuerpo y el tiempo de duración de la interacción, del siguiente modo:

$$I = F \cdot \Delta t \qquad \text{(Newton segundo)} \qquad (11.2)$$

F: fuerza impulsora.

Δt: duración de la interacción.

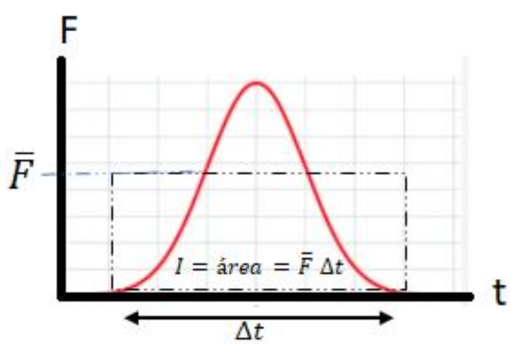
Por otro lado, el impulso también corresponde al cambio de momento lineal, luego:

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v} \qquad (11.3)$$

En general, la fuerza impulsora no es constante en el tiempo y, en este caso, se toma una fuerza promedio. En una dimensión:

$$F\Delta t = \Delta p = mv_f - mv_i \quad \rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad (11.4)$$

Figura 11.3



Ejemplo 11.1

Un bate de beisbol golpea a una pelota de masa 70 gramos con una fuerza promedio de 250 Newton y esta adquiere una rapidez de 80 m/s. Encuentre el tiempo de duración del golpe.

Solución

En este problema debemos expresar los 70 gramos en Kg, esto es m = 0.07 Kg, y utilizar la expresión (11.4). La velocidad inicial es 0 y la fina 80 m/s.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{mv_{final} - mv_{inicial}}{\underline{F}} = \frac{0{,}07 \cdot 80 - 0{,}07 \cdot 0}{250} = 0.022\ (s)$$

Ejemplo 11.2

Un futbolista patea una pelota de masa de 900 gramos y esta adquiere una rapidez de 45 m/s. El tiempo de duración del puntapié fue de 0,15 segundos. Encuentre la fuerza que actúa sobre la pelota.

Solución

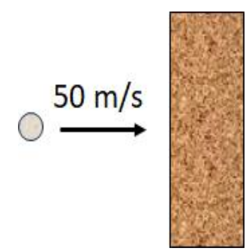
Aquí la velocidad inicial de la pelota es de 0 y la final 45 m/s. Utilizando la expresión (11.4) y, expresando la masa de la pelota en Kg (m = 0,9 Kg), se obtiene:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_f - mv_i}{\Delta t} = \frac{0{,}9 \cdot 45 - 0{,}9 \cdot 0}{0{,}15} = 270\ Newton$$

Ejemplo 11.3

Una pelota de masa m = 20 gramos se mueve con una rapidez de v= 50 m/s, luego choca con un muro y se devuelve sobre la misma dirección con una velocidad de 45 m/s. Encuentre la fuerza promedio que ejerce la pared sobre la pelota si el tiempo de duración del impacto es de 0,005 segundos.

Figura 11.4



Solución

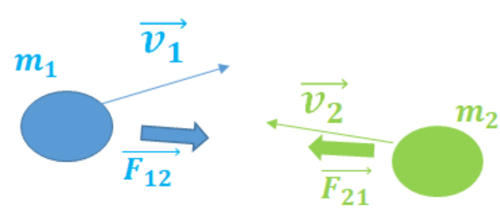
En este problema la velocidad inicial es $50\ \hat{\imath}$ m/s y la final, luego del rebote, es $-45\ \hat{\imath}$ m/s. Luego, usando (11.4) se tiene:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_f - mv_i}{\Delta t} = \frac{0.02 \cdot -45 - 0.02 \cdot 50}{0.005} = -380\ Newton$$

11.4. Conservación del momento lineal

Considere dos cuerpos como un sistema aislado, esto es, no existe interacción con el entorno y la única fuerza que actúa es la de interacción entre los cuerpos que constituyen al sistema, la que puede ser por ejemplo una explosión, ligadura o choque.

Figura 11.5



De la segunda ley de Newton, se sabe que $\vec{F} = m\vec{a}$, por lo que podemos escribir la expresión anterior como $\vec{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

Las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ son fuerzas internas y además constituyen un par de acción y reacción de modo que

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{11.5}$$

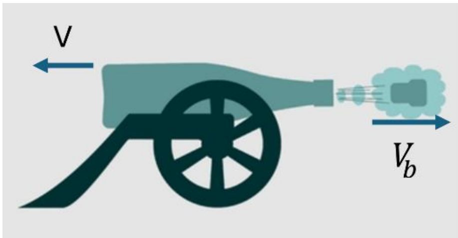
Por lo decimos que en ausencia de fuerzas externas el momento lineal del sistema se conserva, puesto que

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p}_{sistema} \quad \text{es una constante.}} \tag{11.6}$$

Ejemplo 11.4

Un cañón de masa M = 80 Kg dispara una bala de masa m = 0,5 Kg con una rapidez de 200 m/s. Encuentre la velocidad de retroceso del cañón.

Figura 11.6



Adaptado de Jegas, s.f., 123RF.

Solución

El momento inicial del sistema es 0 pues tanto el cañón como la bala están en reposo.

$$P_{i\_Sist} = 0$$

El momento final del sistema es

$$P_{f\_Sist} = M \cdot v + m \cdot v_b = 80 \cdot v + 0{,}5 \cdot 200 = 80 \cdot v + 100$$

Las fuerzas durante la explosión son internas, por tanto, el momento lineal de sistema es constante o equivalentemente se conserva, esto es $P_{i\_Sist} = P_{f\,Sist}$

Así: $80\,v + \mathbf{100} = 0$

$$v = -\frac{100}{80} = -1.25\ m/s$$

Nota: Puesto que estamos trabajando en una dimensión, podemos omitir la flecha sobre las cantidades, sin perder de vista que estamos tratando con cantidades vectoriales.

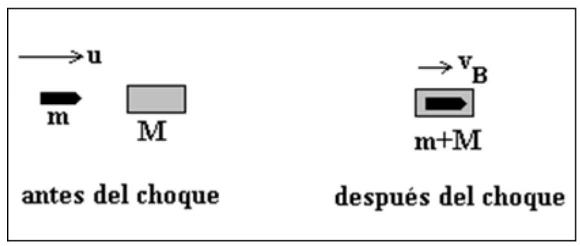
Ejemplo 11.5

Un cuerpo de masa M = 1Kg se encuentra inicialmente en reposo. Una bala de masa m = 100 gramos y velocidad u = 200 m/s hace impacto sobre él quedando incrustado. Encuentre:

a) La velocidad del conjunto después del choque.

b) La pérdida de energía cinética durante el choque.

Figura 11.7



Solución

a) El momento inicial del sistema es $p_i = mu$

y el final $p_f = (m + M)V_B$

Como las fuerzas de interacción son internas, entonces el momento lineal se conserva. Esto es:

$$p_{final} = p_{inicial}$$

$$b)\ E_i = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}0.1 \cdot 200^2 = 2000\ J$$

$$E_f = \frac{1}{2}(m + M)V_B^2 = \frac{1}{2}1.1 \cdot 18.8^2 = 194.4\ J$$

$\Delta E = E_f$ - $E_i = -1806\ J$

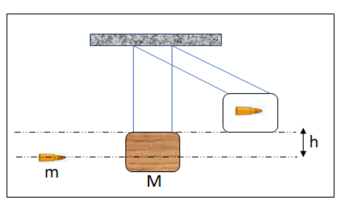
El resultado indica que se ha perdido energía atribuido a procesos de deformación y cambios de temperatura.

Actividades

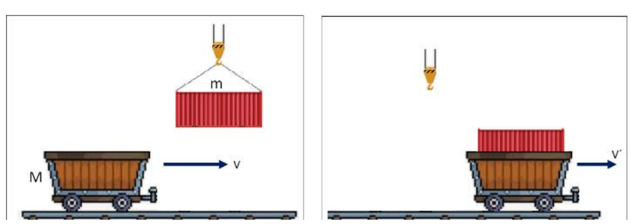
1. Un objeto de masa 100 Kg cae desde una altura de 20 metros. Suponiendo que la deformación del piso es poca después del impacto y el objeto queda en reposo (no rebota), encuentre la fuerza que ejerció el piso sobre el objeto si la duración del impacto fue de 0,0 5 segundos.
2. Un péndulo balístico es un dispositivo que permite medir la velocidad de un proyectil. Tiene un bloque de cierto material colgado como péndulo, de modo que, cuando el proyectil se incrusta en él, el sistema alcanza cierta altura máxima, que es una medida indirecta de la velocidad del proyectil.

Fuente: EduScience UK, s.f.

Supongamos que la masa del bloque es de M =3 Kg y la masa del proyectil m = 200 gramos. Si la altura máxima que alcanza el péndulo luego de realizado el impacto es de h= 20 cm, encuentre la velocidad de la bala al momento del impacto.



3. Un carro de masa M = 120 Kg se mueve a lo largo de un riel con una rapidez de v = 5 m/s y en un punto de su camino cae sobre él una carga de masa m = 100 Kg. Encuentre la rapidez final del carro con su carga.



CAPÍTULO 12: MECÁNICA DEL CUERPO RÍGIDO

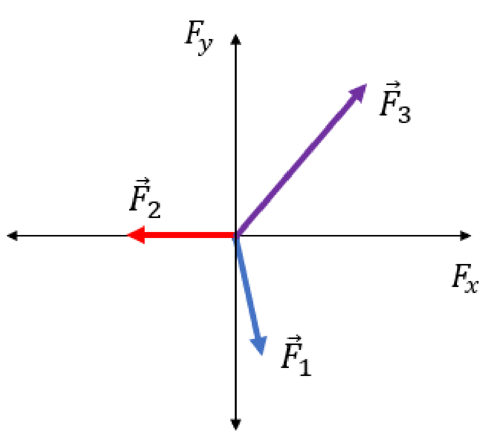
Resumen

En esta nueva unidad, se produce una importante transición conceptual en relación con lo que hemos estudiado anteriormente. Debemos comprender que un diagrama de cuerpo libre representa la acción de todas las fuerzas externas sobre un objeto simplificado. Esto es clave, ya que el objeto de una, dos o tres dimensiones es esquematizado como un punto. Esta esquematización puede ser útil en situaciones en que la magnitud de la fuerza neta es muy grande en comparación a la masa y tamaño del objeto, sin embargo, en situaciones más realistas y comunes, las distintas fuerzas externas actúan sobre puntos distintos de un objeto, pudiendo causar movimiento de traslación y también de rotación. También, hasta la unidad anterior, estudiamos fuerzas que pueden producir movimiento traslacional acelerado.

En la presente unidad, consideraremos a los objetos como cuerpos extendidos o cuerpos rígidos. La palabra rígido representa el hecho de que en este contexto se considera que la distancia entre todos los puntos físicos que componen al objeto no se ve modificada (ya que no se considera aún el fenómeno de deformación).

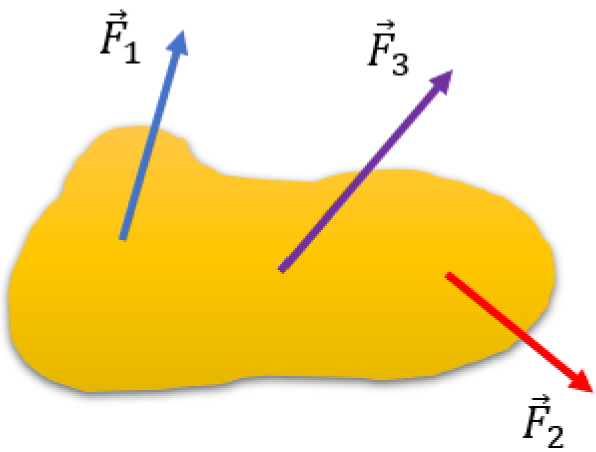
12.1. Transición desde el objeto puntual al cuerpo rígido

Figura 12.1



En las unidades anteriores el objeto físico en estudio se modela como un punto (adimensional o sin dimensiones), sobre el que actúan todas las fuerzas externas. Es decir, la acción de las fuerzas externas se restringe a un solo punto del espacio, lo que solo puede conllevar a la generación de un movimiento de tipo traslacional. En cinemática, en el estudio de la segunda ley de Newton y sus aplicaciones, se implementa esta simplificación del objeto real. Por eso, no hay cabida para la generación ni estudio del movimiento de rotación en torno a un eje fijo que puede atravesar al mismo objeto o no.

Figura 12.2



Por otro lado, si no hacemos uso de la simplificación en que la totalidad de cada objeto se encuentra concentrada en un solo punto del espacio y en vez de esto se les representa considerando su tamaño y su forma real, la física que se nos presenta es más poderosa, aparece un nuevo conjunto de fenómenos físicos que debemos estudiar y nuevas preguntas que podemos hacernos, como por ejemplo:

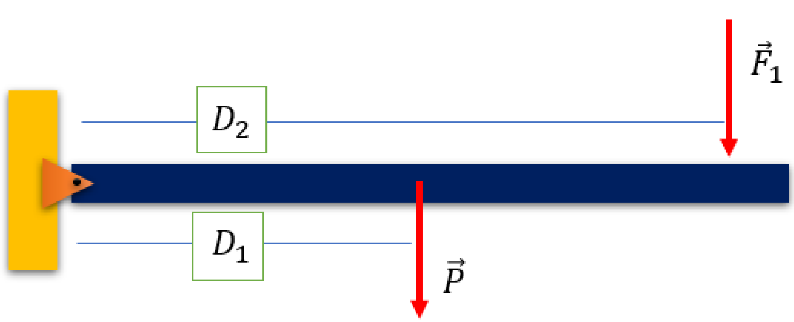
- ¿Qué tipo de movimientos puede manifestar en esta nueva situación el cuerpo rígido?
- Dada la Figura 12.2, ¿por cuál punto de la página pasa el eje de rotación y cuál es su orientación?
- ¿Qué efectos tiene sobre el movimiento rotacional el fijar un eje de rotación específico?
- ¿Puede el eje de rotación ubicarse en puntos del espacio externos al objeto? Esto es, no atraviesa ningún punto del objeto.
- ¿Cuáles son las leyes físicas y por ende, ecuaciones nuevas que debemos estudiar?

Las respuestas a cada una de estas preguntas, entre otras, quedarán claramente definidas en este capítulo.

12.2. Torque y brazo de palanca

La siguiente figura muestra una barra sólida y rígida (que no se deforma), unida a un muro mediante una articulación y un eje fijo que atraviesa el extremo izquierdo de la barra.

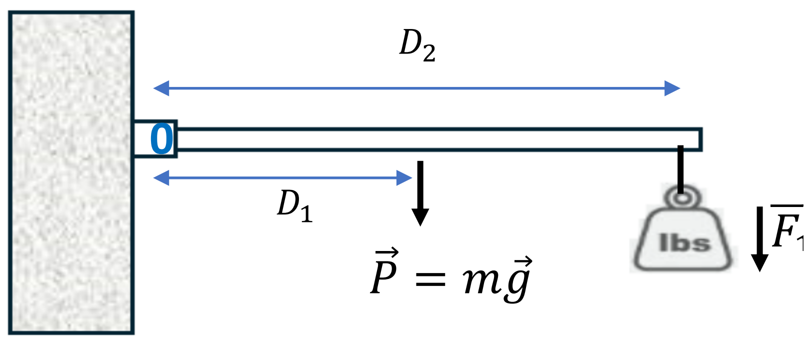
Figura 12.3



En este caso, nosotros establecemos la posición del eje de rotación del objeto. De no ser así, el eje de giro de un objeto *libre* se encuentra naturalmente en su centro de masa CM.

Fijémonos con atención ahora en las dos fuerzas externas $\vec{P}$ y $\vec{F}_1$ que ejercen acción perpendicularmente sobre la barra. Específicamente, la acción es perpendicular con respecto a la línea recta que va desde el eje de giro hasta el punto de aplicación[2] como se muestra en la figura a continuación:

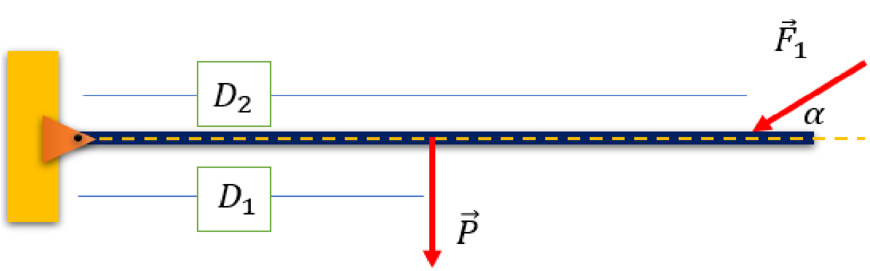
Figura 12.4



Las fuerzas $\vec{P}$ y $\vec{F}_1$ actúan a distancias D_1 y D_2 respectivamente. ¿Distancias con respecto a qué? Con respecto al eje de giro O (en azul). Esto último es clave porque si una fuerza como las mostradas en la figura se aplica a una distancia D cada vez menor o mayor producirá una tendencia a la rotación menor o mayor en la barra con respecto a ese punto de rotación. Esta tendencia a generar movimiento de rotación sobre un objeto debido a la acción de una fuerza externa con respecto a un punto específico de rotación es lo que se denomina Torque, cantidad vectorial muy importante en la mecánica.

Abordemos una situación más general, en que la fuerza $\vec{F}_1$ se encuentra actuando en el mismo punto, pero no de manera perpendicular (Figura 12.5):

Figura 12.5



[2] En este caso, ignoramos el grosor de la barra. Por el momento, solo es importante su dimensión longitudinal.

La pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿de qué manera afecta al torque generado por la fuerza externa el ángulo que esta describe con respecto a la línea recta que une el punto de giro con el punto de acción?

Para responder esto (y otras preguntas de la física), siempre es conveniente llevar la situación mostrada a un caso extremo, por ejemplo, imaginar que el ángulo α tiende a un valor muy pequeño. En esta situación extrema, es evidente que la fuerza *es menos capaz* de generar un movimiento de rotación en la barra. Lo mismo ocurre si el ángulo tiende a los $180°$. Dado esto, podemos concluir fácilmente que el ángulo de acción de una fuerza, descrito por supuesto con respecto a la recta que une el punto de giro con el punto de acción, sí influye en el torque producido por la fuerza externa. Además, observamos que para ángulos rectos el torque alcanza su máximo valor.

Se entiende de mejor manera que tal comportamiento físico sea gobernado por la siguiente expresión fisicomatemática, cuya magnitud está dada por $\tau = r\, F\, sen(\alpha)$:

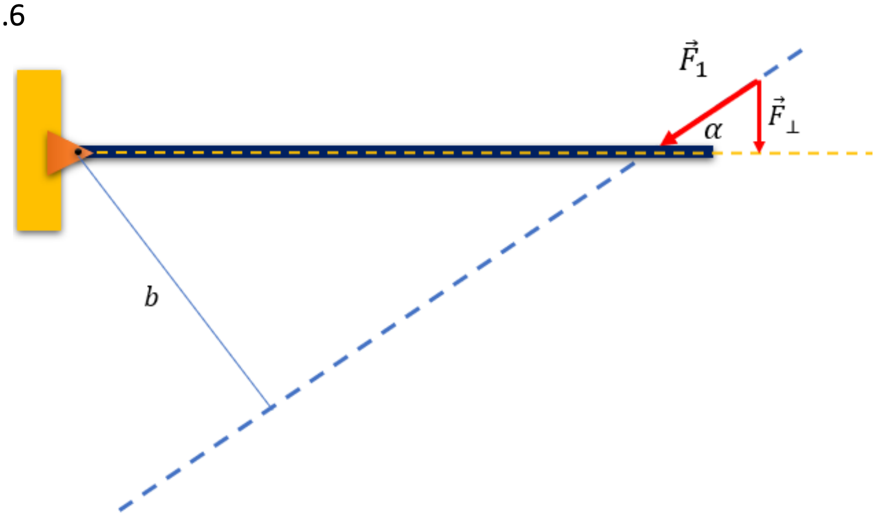
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (12.1)$$

Esta última expresión puede ser escrita de dos maneras, las que permiten visualizar el fenómeno del torque desde dos focos de aprendizaje.

Esto es: $\tau = r\, F_{\perp}$ y $\tau = Fb$, donde $F_{\perp} = F\, sen(\alpha)$ se define como la magnitud de la componente de $\vec{F}$ que actúa perpendicularmente con respecto a la línea recta que une el punto de giro con el punto de aplicación, siendo, por su parte, $F_{\backslash\backslash}$ aquella otra componente que actúa paralelamente con respecto a esta línea y que además no genera torque alguno sobre el objeto.

Por otro lado, el símbolo $b = F\, sen(\alpha)$ representa una cantidad conocida como brazo de palanca, es decir, la longitud de una línea que parte desde el punto de giro e intersecta a la línea de acción de la fuerza aplicada $\vec{F}$. Esquemáticamente esto es:

Figura 12.6



Procedemos ahora con la definición de aquella operación matemática base en el cálculo de torque, brazo de palanca y $F_{\perp}$. Se trata de una operación binaria entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la que brinda como resultado un tercer vector $\vec{C}$. Esta operación debe ser añadida al conjunto de operaciones entre vectores, expuesta en el segundo capítulo, como el conjunto de operaciones matemáticas fundamentales para la mecánica Newtoniana.

12.3. Producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define el producto vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \qquad (12.2)$$

Cuya magnitud se obtiene mediante el cálculo de $C = A\,B\,sen(\alpha)$ y donde el ángulo α es el ángulo *menor* que se encuentra entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. En los esquemas anteriores se cumple tal prescripción para el ángulo α.

Ejemplo 12.1

Realizar la siguiente operación entre vectores:

a) $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$

b) $\vec{B} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$

Solución

Realizamos el producto vectorial utilizando la definición general de la operación:

$$\overrightarrow{A} \times \vec{B} = (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) \times (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) = det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

El último elemento representa el determinante de la matriz:

$$\widehat{k}\,(3\cdot(-3)) - (-4\cdot 2) = \hat{k}(-9+8) = -\widehat{k}$$

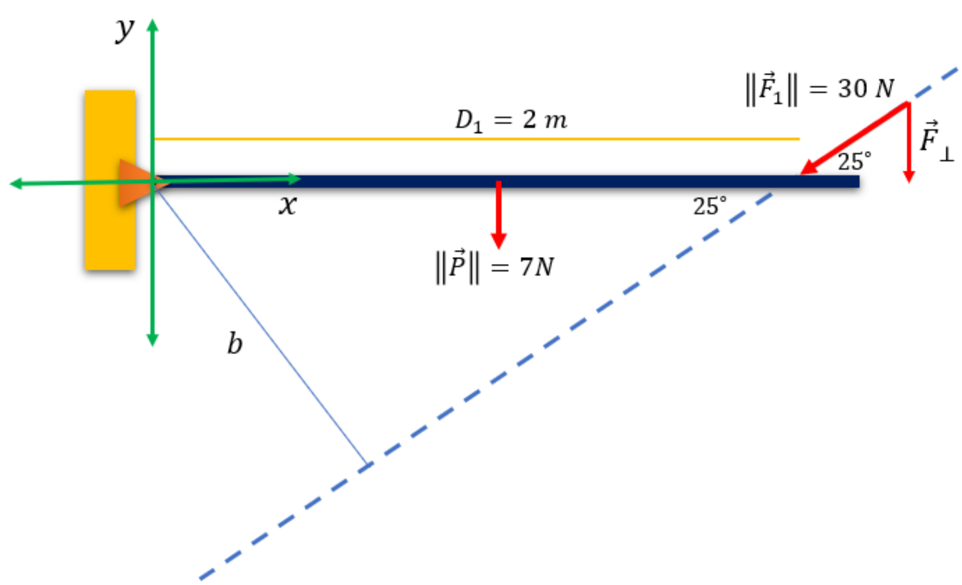
Esta operación nos indica que el plano generado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es perpendicular al eje z generado por el vector unitario $\widehat{k}$. En otras palabras, $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector dirigido en la dirección del eje -z y cuyo módulo (o magnitud si es una cantidad física vectorial) es igual a 1. También podemos concluir, en base al signo negativo, que el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es mayor que 180 grados.

12.4. Cálculo del brazo de palanca b y de la componente $F_{\perp}$ de F

Usaremos los esquemas presentados anteriormente para calcular el valor de las cantidades b y $F_{\perp}$, como así también para determinar los vectores que representan el o los torques (cuya suma se denomina *torque neto*) en una determinada situación. Para tal propósito, es necesario definir antes y correctamente los vectores que representan a las fuerzas externas que lo producen.

Consideremos la siguiente situación:

Figura 12.7



En este caso, se aprecia la acción de dos fuerzas externas, el peso $\vec{P}$ (ubicado en el centro de masa de la barra CM) y otra fuerza externa $\vec{F}$ cuya magnitud y dirección están dadas explícitamente.

Paso 1: Construcción de los vectores que usaremos

Nuestra elección de sistema coordenado[3] para esta situación es el de uno ubicado en el punto de giro de la barra. Entonces, es desde ese punto que definiremos las distancias y con ello el vector de posición del punto de aplicación de cada fuerza y los vectores de fuerza.

Brazo de posición del punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$: $\vec{r}_F = 2\hat{\imath}+0\hat{\jmath}\ \ (m)$

Para definir el vector de fuerza, trasladamos sin rotar el vector de fuerza situando su *cola* en el origen:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F\,cos(25)(-\hat{\imath}) + F\,sen(25)(-\hat{\jmath}) \quad (N) \qquad (12.3)$$

Luego se usa la definición de torque:

$$\vec{r}_F \times \vec{F} = 2\hat{\imath} \times F(cos(25)(-\hat{\imath}) + sen(25)(-\hat{\jmath})) = \quad \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -\mathrm{F}\cos(25) & -Fsen(25) & 0 \end{pmatrix}$$

Su resultado es $\vec{\tau}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = 2sen(25)(-\hat{k})\ \ (Nm).$ (12.4)

Esto significa que el torque producido por la fuerza externa $\vec{F}$ a una distancia de 2 metros medida desde el eje de giro tiene una magnitud de $2sen(25)$ y que apunta en la dirección del eje -z. Esto genera una tendencia a girar en el sentido de las manecillas del reloj.

Actividades

1. Calcular el torque producido para este caso por la fuerza peso $\vec{P}$.

   Respuesta: $7\ (-\hat{k})\ \ (Nm)$

2. Calcular el vector de torque neto (total) con respecto al eje de giro establecido, que se ejerce sobre la barra

   Respuesta: $(7 - 2\ sen(25))\hat{k}\ \ (Nm)$

[3] La elección de un sistema coordenado se basa exclusivamente en cuánto simplifica los cálculos.

REFERENCIAS

Imágenes

1. dak. (s.f.). 1764-84-427. Illustoon. https://illustoon.com/es/?id=1764#google_vignette
2. dikobrazik. (s.f.). 48880946. https://es.123rf.com/photo_48880946_del-norte-y-am%C3%A9rica-del-sur-mapa-ilustraci%C3%B3n-color-y-cuadr%C3%ADcula.html
3. EduScience UK. (s.f.). Ballistic Nylon Pendulum Apparatus. https://eduscienceuk.com/product/ballistic-nylon-pendulum-apparatus/
4. Ekaterina Chernysheva. (s.f.). *ID 116848039*. Dreamstime. https://es.dreamstime.com/siluetas-visuales-del-dibujo-corredor-image116848039
5. Gedo7. (27 de julio de 2021). Brainly. https://brainly.lat/tarea/716461
6. Gomolach. (9 de octubre de 2018). *ID 1199656555*. Shutterstock. https://www.shutterstock.com/es/image-vector/vector-realistic-3d-celsius-electronic-medical-1199656555
7. Jegas. (s.f.). *ID 55041895*. 123RF. https://es.123rf.com/clipart-vectorizado/cannon_carriage.html
8. Klyaksun. (s.f.). *182713409*. 123RF. https://es.123rf.com/photo_182713409_vista-superior-de-la-costa-del-mar-playa-oce%C3%A1nica-con-rocas-y-acantilados-dibujo-de-dibujos-animados.html
9. Leremy Gan. (s.f.). LeremyStickFigures. *Etsy*. https://www.etsy.com/es/listing/782005271/hombre-personas-persona-moviendo-caja
10. Mary San. (s.f.). *ID 81933583*. Dreamstime. https://es.dreamstime.com/stock-de-ilustraci%C3%B3n-vector-rojo-del-icono-del-carrete-de-la-manguera-de-bomberos-image81933583
11. Simple Line. (s.f.). *#392191283*. Adobe Stock. https://stock.adobe.com/es/images/one-continuous-line-drawing-of-young-bodybuilder-man-doing-exercise-with-a-heavy-weight-bar-in-gym-powerlifter-train-weightlifting-concept-dynamic-single-line-draw-design-graphic-vector-illustration/392191283?prev_url=detail
12. Shutterstock.(s.f.).*Lanzador*. https://www.shutterstock.com/es/search/lanzador?image_type=illustration
13. Stoonn. (s.f.). *ID 40266108*. 123RF. https://es.123rf.com/photo_40266108_ilustraci%C3%B3n-del-vector-de-caja-de-madera-marr%C3%B3n-en-blanco-ilustraci%C3%B3n-vectorial.html

UDLA
UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS