INSTITUTO DE MATEMÁTICAS FÍSICA Y ESTADÍSTICA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y NEGOCIOS

Álgebra – Problemas propuestos y resueltos

Plan de Acompañamiento Académico UDLA

Autor
Mg. Luis Hernández Molina

Plan de Acompañamiento Académico UDLA

ISBN:

Primera edición: Julio 2024

Imagen de portada: Shutterstock

© Todos los derechos reservados INSTITUTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y ESTADÍSTICA - UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS, 2024

Autor: Luis Hernández Molina

Prohibida su comercialización.
La reproducción está permitida para fines educativos, mencionando expresamente al Instituto de Matemática, Física y Estadística de Universidad de Las Américas, junto a sus autores.

Ley de Propiedad Intelectual N° 17.336

Edición
Camila Muñoz Parietti

Coordinación
Ricardo Monge Rogel

Universidad de Las Américas
Dirección: Avda. Manuel Montt 948, Providencia, Santiago de Chile. www.udla.cl

Introducción

Este texto esta dirigido a los estudiantes que cursan la asignatura de *Álgebra I*, la cual tiene como prerrequisito la asignatura de *Matemática General* (MAT100) o *Introducción a la Matemática Aplicada* (MAT110). Estas asignaturas son necesarias en virtud de que entregan a los estudiantes las herramientas básicas requeridas del área matemática, por ejemplo, resolución de ecuaciones y propiedades de las funciones, entre otros; además, permiten desarrollar y profundizar las grandes ideas de la matemática que se ponen en juego, orientándose en los conocimientos matemáticos previos mínimos para avanzar en estudios superiores en el ámbito de esta y otras disciplinas.

Su meta formativa es desarrollar en el estudiante las habilidades para identificar y relacionar objetos geométricos con sus representaciones analíticas, plantear y resolver problemas propios de su disciplina y progresar en el desarrollo del pensamiento lógico matemático. Además que adquiera un sentido crítico de causa y efecto, basado en el análisis de los conceptos matemáticos, lo cual le permitirá razonar cohesiva y coherentemente en la mayoría de las materias y disciplinas requeridas en este tipo de conocimiento.

En relación con los saberes que se desarrollan en la asignatura, se espera que el estudiante logre, desde una perspectiva conceptual, conocer las propiedades y teoremas de la lógica proposicional, conjuntos, geometría analítica, progresiones, combinatoria, números complejos y polinomios. También se espera que pueda reconocer las raíces de los polinomios, diferenciar una progresión aritmética de una geométrica y un número real de un número complejo. Desde una perspectiva procedimental, se espera que el estudiante aplique las propiedades y teoremas en la resolución de problemas algebraicos, aplique las propiedades de la lógica proposicional para determinar la veracidad de un enunciado, represente gráficamente una cónica indicando claramente su foco y vértice, además de construir diagramas de Venn-Euler para resolver problemas de encuestas. Por último, desde una perspectiva actitudinal, se espera que el estudiante manifieste una actitud responsable hacia los plazos establecidos para la entrega de trabajos y controles, presente resultados en forma rigurosa, clara y precisa, trabaje en equipo, comunique y comparta sus ideas y hallazgos, demuestre autonomía y evalúe, en forma crítica, el desempeño personal, reconociendo sus limitaciones y fortalezas.

Contenidos

UNIDAD I: Lógica y conjuntos

Resultados de aprendizaje

R1. Determinar el valor de verdad de proposiciones compuestas mediante el uso de las propiedades de la lógica proposicional.

R2. Usar los diagramas de Venn-Euler para dar respuesta a problemas de opinión y encuestas.

Contenidos

- Concepto de proposición.
- Tablas de verdad de los conectivos lógicos principales.
- Leyes de la lógica.
- Cuantificadores.
- Concepto de conjunto.
- Conjunto por comprensión y extensión.
- Conjunto vacío. Conjunto universo.
- Operaciones con conjuntos.
- Aplicaciones usando diagrama de Venn-Euler.

1. Lógica

Resumen

Conectivos lógicos

Los conectivos lógicos (ver tabla 1.1) permiten combinar un número finito de proposiciones simples para obtener otras, cuyo valor de verdad puede ser conocido construyendo su tabla de verdad

Conectivo	Simbolo	Proposición Compuesta	Se lee
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
Disjunción	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Condicional	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	p implica q (si p, entonces q)
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p si y solo si q
Disyunción exclusiva	$\veebar$	$p \veebar q$	p *o* q, pero no ambos

Tabla 1.1

Proposiciones compuestas y tablas de verdad

Sean p y q proposiciones simples. En la tabla de verdad (ver tabla 1.2) se indican los valores resultantes de las proposiciones compuestas para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de las proposiciones simples.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \veebar q$
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V	F

Tabla 1.2

Equivalencias lógicas

1. $\sim(\sim p) \equiv p$
2. $p \wedge p \equiv p$
3. $p \vee p \equiv p$
4. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
5. $p \vee q \equiv q \vee p$
6. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
7. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
8. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
9. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
10. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
11. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
12. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
13. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
14. $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
15. $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$
16. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
17. $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$
18. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
19. $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$
20. $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$
21. $\sim p \vee p \equiv V$
22. $\sim p \wedge p \equiv F$
23. $p \wedge V \equiv p$
24. $p \wedge F \equiv F$
25. $p \vee V \equiv V$
26. $p \vee F \equiv p$

Cuantificadores

Definición 1.1 Cuantificadores

- **Cuantificador universal.** La proposición $(\forall x \in \mathbb{U} : p(x))$, se lee "para todo x en $\mathbb{U}$ tal que $p(x)$", es verdadera siempre que $p(x)$ ocurre para cualquier valor de x en $\mathbb{U}$. En caso contrario, es falsa.
- **Cuantificador existencial.** La proposición $(\exists x \in \mathbb{U} : p(x))$, se lee "existe al menos un x en $\mathbb{U}$ tal que $p(x)$", y además es verdadera cuando se puede encontrar por lo menos un x tal que $p(x)$ ocurre. En caso contrario, es falsa.
- **Cuantificador existencial con unicidad.** La proposición $(\exists! x \in \mathbb{U} : p(x))$, se lee "existe un único x tal que $p(x)$", es verdadera cuando es posible encontrar solo un único $x \in \mathbb{U}$ de modo que $p(x)$ ocurre. Si existiere más de uno, la proposición es falsa.
- **Negación de proposiciones que contienen cuantificadores.**

  a). $\sim[\forall x \in A : p(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in A) :\sim p(x)$

  b). $\sim[\exists x \in A : p(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in A) :\sim p(x)$

  c). $\sim[\forall x \in A : (p(x) \vee q(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in A) : (\sim p(x) \wedge \sim q(x))$

  d). $\sim[\forall x \in A : (p(x) \wedge q(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in A) : (\sim p(x) \vee \sim q(x))$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1 Al simplificar la proposición compuesta $(p \to (r\wedge \sim p)) \wedge (q \to\sim p)$ se obtiene:

A. $\sim p$ B. $\sim q$ C. $p \vee q$ D. $\sim p \vee q$ E. p

Solución

$$\begin{aligned}
&\equiv (p \to (r\wedge \sim q)) \wedge (q \to\sim p) \quad \text{definición de} \quad p \to q \equiv\sim p \vee q\\
&\equiv (\sim p \vee (r\wedge \sim p)) \wedge (\sim q\vee \sim p) \quad \text{ley de idempotencia: } (p \vee (p \wedge q) \equiv p)\\
&\equiv (\sim p) \wedge (\sim q\vee \sim p)\\
&\equiv\sim p
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.2 La proposición compuesta $[\sim (p \vee q) \to\sim q] \wedge p$ es una:

A. Tautología B. Contradicción C. Contingencia

Solución

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim (p \vee q) \to\sim q$	$[\sim (p \vee q) \to\sim q] \wedge p$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F

$\therefore$ la proposición es una contingencia. ■

Ejercicio 1.3 Si p y q son dos proposiciones, entonces, $\sim (\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge q)$ es lógicamente equivalente a:

A. p B. q C. $p \wedge q$ D. $\sim p \vee q$ E. $p\wedge \sim q$

Solución

$$\begin{aligned}
&\equiv\sim (\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge q)\\
&\equiv ((\sim (\sim p)) \vee (\sim q)) \wedge (p \vee q)\\
&\equiv (p\vee \sim q) \wedge (p \vee q)\\
&\equiv p \vee (\sim q \wedge q)\\
&\equiv p \vee F \equiv p
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.4 Sea la proposición Q: $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x \rightarrow y)$, entonces, la negación de Q es:

A. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\,(x \wedge \sim y)$
B. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)\,(\sim x \vee y)$
C. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\,(\sim x \rightarrow \sim y)$
D. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\,(y \rightarrow x)$
E. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\,(\sim x \vee y)$

Solución

$$\text{Sea} \quad Q : (\exists x \in A)(\forall y \in B)(x \rightarrow y).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sim Q :& \sim [(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x \rightarrow y)] \\
\sim Q :& (\forall x \in A)(\exists y \in B) \sim (x \rightarrow y) \\
\sim (x \rightarrow y) \equiv \sim (\sim x \vee y) \equiv x \wedge \sim y & \qquad \text{propiedad.} \\
\text{Su negación es} \sim Q :& (\forall x \in A)(\exists y \in B)\,(x \wedge \sim y).
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.5 Al simplificar la proposición compuesta $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ se obtiene:

A. $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ B. $p \rightarrow (p \vee q)$ C. $p \rightarrow (p \wedge q)$ D. $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Sea} \quad p \rightarrow (q \rightarrow p) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow p) \\
&\equiv (\sim p) \vee (\sim q \vee p) \\
&\equiv (\sim q) \vee (p \vee \sim p) \\
&\equiv (\sim q) \vee V \equiv V
\end{aligned}$$

$\therefore \quad p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es una tautología.

$$\begin{aligned}
\text{Por otro lado,} \quad p \rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim p \vee (p \vee q) \\
&\equiv (\sim p \vee p) \vee q \\
&\equiv V \vee q \equiv V
\end{aligned}$$

$\therefore \quad p \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

En consecuencia, $p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv p \rightarrow (p \vee q)$.

■

Ejercicio 1.6 Sean p, q y r proposiciones, la proposición compuesta

$$(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$$

es una:

A. Tautología B. Contingencia C. Contradicción

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Sea} \quad p \to (q \to r) &\equiv \sim p \vee (q \to r) \\
&\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \quad \text{definición de} \quad p \to q \equiv \sim p \vee q \\
&\equiv [(\sim p) \vee (\sim q)] \vee r \quad \text{prop. asociativa} \\
&\equiv \sim (p \wedge q) \vee r \\
&\equiv (p \wedge q) \to r
\end{aligned}$$

$\therefore$ la proposición es una tautología. ■

Ejercicio 1.7 Suponga que p y q son dos proposiciones tal que $p \to q$ es falso, entonces, ¿cuál de las siguientes opciones no es verdadera?:

A. El valor de verdad de $(\sim p) \wedge (\sim q)$ es F.

B. El valor de verdad de $\sim p \vee q$ es F.

C. El valor de verdad de $p \wedge (\sim q)$ es V.

D. El valor de verdad de $p \vee q$ es V.

E. El valor de verdad de $p \to (\sim q \vee p)$ es F.

Solución

Si $p \to q \equiv F \to (p \equiv V \wedge q \equiv F)$, luego:

$A.$ $(\sim p) \wedge (\sim q) \equiv F \wedge V \equiv F$

$B.$ $\sim p \vee q \equiv F \vee F \equiv F$

$C.$ $p \wedge (\sim q) \equiv V \wedge V \equiv V$

$D.$ $p \vee q \equiv V \vee F \equiv V$

$E.$ $p \to (\sim q \vee p) \equiv V \to V \equiv V$ Opción falsa

■

Ejercicio 1.8 Si la proposición $(p \to \sim q) \vee (\sim r \to s)$ es falsa, entonces, ¿cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?:

A. $(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim r$

B. $(\sim r \vee q) \to s$

C. $(\sim q) \to (\sim r \wedge p)$

D. $(\sim s \vee p) \to (r \wedge \sim p)$

E. $[(s \wedge \sim q) \vee \sim r] \to \sim p$

Solución

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & (p \to \sim q) \vee (\sim r \to s) \quad \text{es falsa} \\ & \text{entonces}, (p \to \sim q) \equiv F \wedge (\sim r \to s) \equiv F \\ \text{Si} & (p \to \sim q) \equiv F \to (p \equiv V \wedge q \equiv V), \\ & \text{entonces } (\sim r \to s) \equiv F \to (r \equiv F \wedge s = F) \end{array}$$

entonces,

$$\begin{array}{l} A. (\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim r \equiv (F \wedge F) \wedge V \equiv F \\ B. (\sim r \vee q) \to s \equiv (V \vee V) \to F \equiv F \\ C. (\sim q) \to (\sim r \wedge p) \equiv F \to (V) \equiv V \\ D. (\sim s \vee p) \to (r \wedge \sim p) \equiv (V \vee V) \to (F \wedge F) \equiv F \\ E. [(s \wedge \sim q) \vee \sim r] \to \sim p \equiv [(F) \vee V] \to F \equiv V \to F \equiv F \end{array}$$

■

Ejercicio 1.9 Sea S un conjunto no vacío, subconjunto de $\mathbb{R}$. Considere la proposición

$$P: \text{Existe un número racional } x \in S \text{ tal que } x > 0.$$

¿Cuál de las siguientes sentencias es la negación de la proposición P?:

A. Todo número racional $x \in S$ satisface $x \leq 0$.

B. Existe un número no racional $x \in S$ tal que $x \leq 0$.

C. Existe un número racional $x \in S$ tal que $x \leq 0$.

D. $x \in S$ y $x \leq 0. \to x$ no es un número racional.

Solución
La proposición P se puede escribir como $P: \exists x \in \mathbb{Q} \cap S$ tal que $x > 0$.
La negación de P es $\sim P: \forall x \in \mathbb{Q} \cap S$ tal que $x \leq 0$.
O bien todo número racional $x \in S$ satisface $x \leq 0$. ■

Ejercicio 1.10 Considere las siguientes proposiciones:
p: Suman es brillante, q: Suman es rico, r: Suman es honesto.
La negación de "Suman es brillante y deshonesto si y sólo si Suman es rico", puede ser expresada como:

A. $\sim (q \leftrightarrow (p \wedge \sim r))$

B. $\sim p \wedge (q \leftrightarrow \sim r)$

C. $\sim (p \wedge \sim r) \leftrightarrow q$

D. $\sim q \leftrightarrow \sim p \wedge r$

Solución

Para "Suman es brillante y deshonesto" se tiene $p \wedge \sim r$.
Así, $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow q$
representa a "Suman es brillante y deshonesto si y sólo si Suman es rico".
Su negación es
$\sim ((p \wedge \sim r) \leftrightarrow q)$, o bien $\sim (q \leftrightarrow (p \wedge \sim r))$.

Problemas propuestos

Problema 1.1 Decida si cada una de las siguientes oraciones es o no una proposición. En caso afirmativo, determine si es verdadero o falso.

A. $5+7=12$.

B. ¿Habla usted inglés?

C. Todo número entero es un número natural.

D. x es mayor que y.

Solución: A. Verdadero B. No es proposición C. Falso D. No es proposición

Problema 1.2 Sean las proposiciones p: "3 es mayor que 5" y q: "6 es un número divisible por 2 y 3". Determine el valor de verdad (V o F) de cada una de las proposiciones:

A. $p \wedge q$ B. $\sim p \vee q$ C. $p \wedge \sim q$ D. $\sim p \vee \sim q$ E. $\sim p \wedge \sim q$

Solución: A. Falso B. Verdadero C. Falso D. Verdadero E. Falso

Problema 1.3 Dadas las proposiciones p, q y r cuyos valores de verdad son respectivamente V, F y F, determine el valor de verdad de las proposiciones compuestas:

A. $[p \to \sim (p \vee \sim q)]$ B. $(\sim p \wedge q) \to (\sim q \vee r)$

Solución: A. Falso B. Verdadero

Problema 1.4 Construya una tabla de verdad para la proposición compuesta y establezca si es una tautología, contradicción o contingencia.

$$[(\sim p \to \sim q) \wedge (\sim q \to r)] \wedge [\sim r \to (p \vee q)]$$

Solución: Tautología.

Problema 1.5 Construya una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas e indique si es una contradicción, contingencia o tautología.

A. $[(p \vee q) \wedge \sim r] \to r$ B. $(p \to (q \vee \bar{r})) \vee (p \to (p \vee \sim r))$

Solución: A. Contingencia B. Tautología

Problema 1.6 Simplifique usando unicamente propiedades de proposiciones:

A. $[(p \to q) \vee p] \wedge [(p \to q) \vee \sim p]$

B. $\sim p \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)]$

C. $[(p \to q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \to p)$

Solución: A. $(\sim p \vee q)$ B. $\sim p$ C. q

Problema 1.7 Considere las proposiciones p : Luis estudia y q : Luis trabaja. Simplifique el esquema

$$[(p \vee q) \wedge (\sim p \to q)] \to \sim q$$

y luego demuestre que este equivale a Luis no trabaja.
Solución: $\sim q$

Problema 1.8 Sean las proposiciones $p(x) : x^2 - 16 = 0$, $q(x) : x - 12 = 0$, $r(x) : x^2 > 9$, encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

A. $[p(2) \wedge \sim q(2)] \leftrightarrow r(4)$

B. $[\sim p(4) \rightarrow r(5)] \vee \sim q(4)$

C. $[(p(1) \wedge p(3)) \leftrightarrow (r(2) \vee p(3))] \rightarrow [\sim (p(2) \vee q(2))]$

Solución: A. Falso B. Verdadero C. Verdadero

Problema 1.9 Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Halle el valor de verdad de cada proposición:

A. $(\forall x \in A)\,(\exists y \in A)\,(x + y \leq 6)$

B. $(\exists x \in A)\,(\forall y \in A)\,(x < 2 \rightarrow y < 6)$

C. $(\exists x \in A)\,(\forall y \in A)\,(x + y < 7 \wedge y - x \leq 3)$

Solución: A. Verdadero B. Falso C. Verdadero

Problema 1.10 Sean $A = \{1,2,3\}$, y $B = \{2,4\}$ y las proposiciones

$$p : (\forall x \in A)(\exists y \in B)(x > y) \text{ y } q : (\exists y \in B)(\forall x \in A)(x > y).$$

Determine el valor de verdad de $q \rightarrow p$.
Solución: Verdadero.

Problema 1.11 Niegue cada una de las siguientes proposiciones:

A. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,[p(x) \rightarrow (q(y) \rightarrow r(x))]$

B. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(\exists z \in \mathbb{R})\,[p(x,y) \rightarrow (q(x) \wedge r(z))]$

C. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,[x + 2 > 3 \rightarrow y < 0]$

Solución:

A. $(\exists y \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R})\,[p(x) \wedge q(y) \wedge \sim r(x)]$

B. $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(\forall z \in \mathbb{R})\,[p(x,y) \wedge \sim q(x) \wedge \sim r(z)]$

C. $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,[x + 2 > 3 \wedge y \geq 0]$

Problema 1.12 Sean las proposiciones

$$p : \left\{\forall x \in \mathbb{R}^+ / x^0 = 1\right\}$$

$$q : \left\{\exists x \in \mathbb{Q} / 3x^2 = x - 5\right\}$$

$$r = \left\{\exists x \in \mathbb{Z} / x^2 - 2x - 1 = -1\right\}.$$

Evalúe la proposición compuesta

$$\sim \{\sim (p \vee \sim q)\} \leftrightarrow \{\sim [(r \wedge p) \rightarrow (p \wedge \sim p)]\}$$

Solución: Verdadero.

2. Conjuntos

Resumen

Defnción

Definición 2.1 Sean A, B conjuntos no vacíos

- **Conjunto vacío**: $\varnothing = \{x/ \;\; x \neq x\} = \{\}$.
- **Conjunto universo**: Es el conjunto formado por todos los elementos a los que se hace referencia. Se denota generalmente $\mathbb{U}$.
- **Inclusión de conjuntos**: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{U} : x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- **Conjunto potencia**: El conjunto potencia del conjunto A es otro conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto A. Se denota mediante $P(A) = \{X/X \subset A\}$.

Unión entre conjuntos

$A \cup B = \{x \in \mathbb{U} : x \in A \vee x \in B\}$.

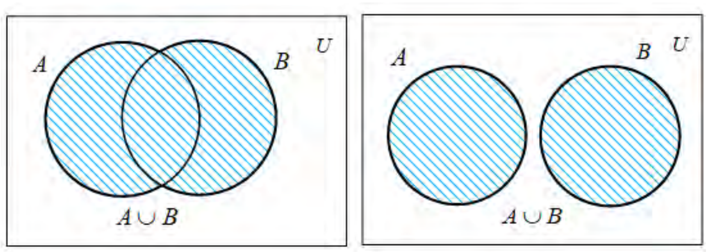


Figura 2.1

Proposición 2.1

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup A = A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Intersección entre conjuntos

$A \cap B = \{x \in \mathbb{U} : x \in A \wedge x \in B\}$.

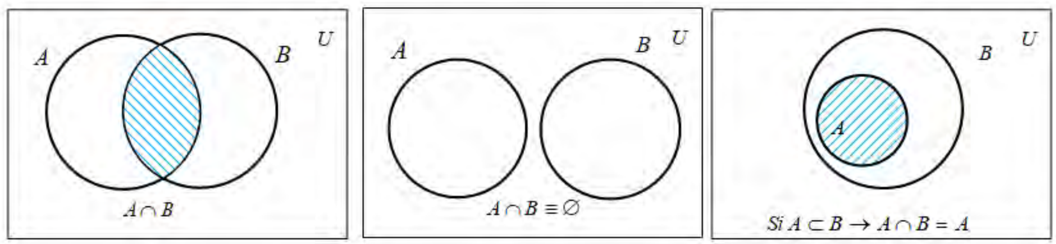


Figura 2.2

Proposición 2.2

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Diferencia entre conjuntos

$A - B = \{x \in \mathbb{U} : x \in A \wedge x \notin B\}$.

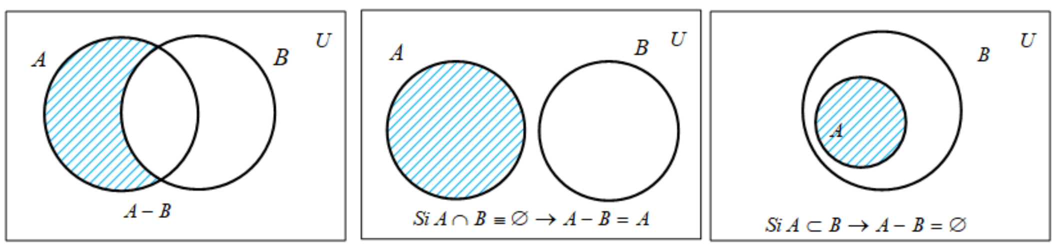


Figura 2.3

Complemento de un conjunto

Se denota por A' o bién A^c, y se define como $A' = A^c = \mathbb{U} - A = \{x \in \mathbb{U} : x \notin A\}$.

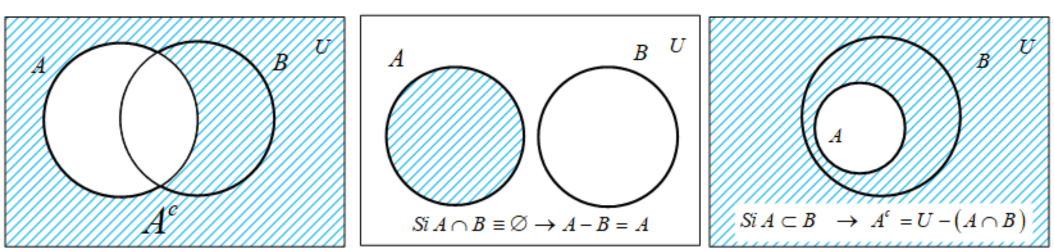


Figura 2.4

Proposición 2.3 **Operaciones entre conjuntos**

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \cup A^c = \mathbb{U}$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap A = A$
5. $A \cap A^c = \varnothing$
6. $A \cap \varnothing = \varnothing$
7. $\varnothing^c = \mathbb{U}$
8. $\mathbb{U}^c = \varnothing$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$
11. $A \cap \mathbb{U} = A$
12. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
13. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
14. $A - B = A \cap B^c$
15. $(A \cup B) \cap A = A$

Cardinalidad de un conjunto

Sean A, B y C conjuntos arbitrarios.

1. Si $A \cap B = \phi \to n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
3. $n(\phi) = 0$
4. $n(A^c) = n(U) - n(A)$
5. $n(A \cap B^c) = n(A) - n(A \cap B)$
6. $n(A^c \cup B^c) = n(A \cap B)^c = n(U) - n(A \cap B)$
7. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
8. $n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A \cap B^c) - n(A^c \cap B)$
9. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Considere las siguientes figuras (ver fig.2.5) de ayuda:

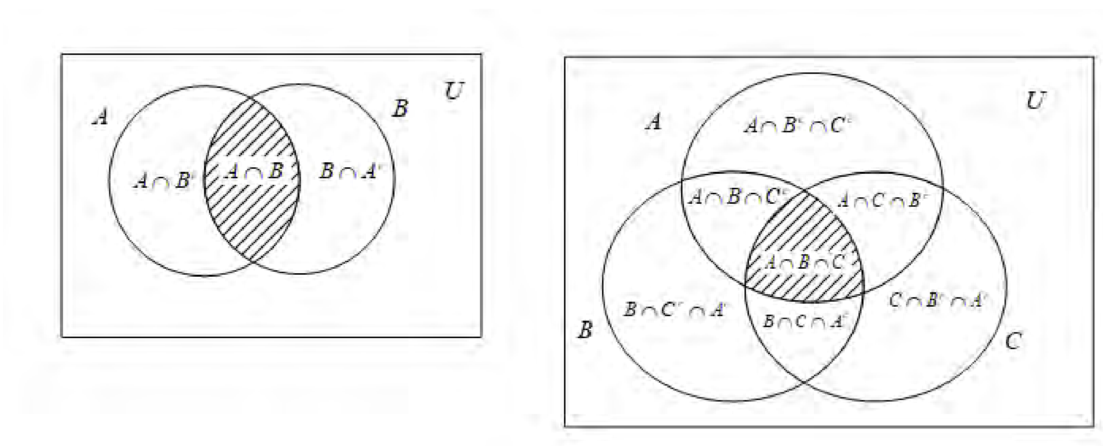


Figura 2.5

.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1 Sean los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x > 4 \rightarrow x = 6\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} / x > 0 \wedge x \leq 5\}$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{Z} / \sim \left(x \geq 1 \rightarrow x^2 \neq 4x - 3\right)\right\}.$$

Entonces,

$$(A \cap B) - (B \cap C)$$

es igual a:

A. $\{1,2,3\}$ B. $\{3\}$ C. $\{1,2,3\}$ D. $\{1,2,4\}$ E. $\{1,2,3,4\}$

Solución

Sea $(p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q), A = \{x \in \mathbb{N} / x < 4 \vee x = 6\} = \{1,2,3,4,6\}\, y$
$B = \{x \in \mathbb{N} / x > 0 \wedge x \leq 5\} = \{1,2,3,4,5\}.$

Sea $(\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q), C = \left\{x \in \mathbb{Z} / x \geq 1 \wedge x^2 = 4x - 3\right\} = \{3\}$
$\rightarrow A \cap B = \{1,2,3,4\}$ y $B \cap C = \{3\} \rightarrow (A \cap B) - (B \cap C) = \{1,2,4\}.$

■

Ejercicio 2.2 Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Si $B \cap C = \varnothing$, entonces,

$$[A - (B \cup C)] \cup (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

es igual a:

A. $A \cup B$ B. $C - A$ C. A D. $B \cap C$ E. B

Solución

$$\begin{aligned}
&\equiv [A - (B \cup C)] \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
&\equiv \left[A \cap (B \cup C)^c\right] \cup A \cap (B \cup C) \\
&\equiv A \cap \left[(B \cup C)^c \cup (B \cup C)\right] \\
&\equiv A \cap U \equiv A
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 2.3 En una encuesta a 170 comerciantes que laboran en un centro comercial, se tiene que 30 son sordos y venden libros; 32 escuchan música y venden libros; 75 venden libros y no escuchan música; 55 son sordos; y 60 escuchan música.
¿Cuántos de los que no oyen música no venden libros, ni son sordos?

A. 15 B. 18 C. 12 D. 10 E. 14

Solución
Sean los conjuntos de personas
S={con sordera}, M={escuchan música}, y V={venden libros}.
Note que los conjuntos S y M son disjuntos, por la naturaleza de las personas; luego en un diagrama de Venn-Euler (ver figura 2.6) se tendrá:

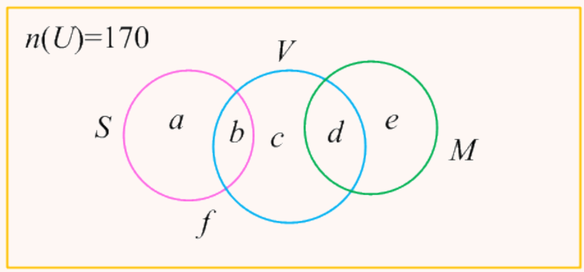


Figura 2.6

$$
\begin{aligned}
b &= 30\\
d &= 32\\
c + b = 75 \to c &= 75 - 30 = 45 \to c = 45\\
a + b = 55 \to a &= 55 - 30 = 25 \to a = 25\\
d + e = 60 \to e &= 60 - 32 = 28 \to e = 28
\end{aligned}
$$

¿Cuántos de los que no oyen música no venden libros, ni son sordos?:

$$f = 170 - (30 + 32 + 45 + 25 + 28) = 10 \to f = 10$$

■

Ejercicio 2.4 En el gráfico de la figura 2.7, la región sombreada es:

A. $A-(B\cap C)$

B. $A\cap(B\cup C)^c$

C. $(A-B)\cap(C-A)^c$

D. $A\cap(B-C)^c$

E. $(A-C)\cup(B\cap C)$

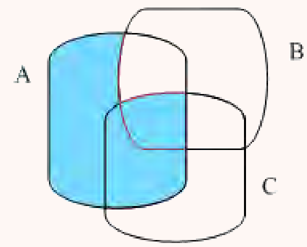


Figura 2.7

Solución: D.

Ejercicio 2.5 Sea A un conjunto tal que $n(A)=3p+q$ y B un conjunto de modo que $n(B)=2q+3$, y $n(A\cap B)=p+q-4$. ¿Cuántos elementos hay en $A\Delta B$?

A. $p+12$ B. $2p-q$ C. $p+q-8$ D. $2p+3q$ E. $p+q+11$

Solución
Se requiere calcular $n(A\Delta B)$:

$$\begin{aligned}
n(A\Delta B) &= n((A\cup B)-(A\cap B)) = n(A\cup B)-n(A\cap B)\\
n(A\Delta B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B)-n(A\cap B)\\
n(A\Delta B) &= 3p+q+2q+3-2(p+q-4)\\
n(A\Delta B) &= p+q+11
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.6 Al simplificar la expresión $[A-(B\cap A^c)]\cap[(B-A)\cap A]^c$ utilizando propiedades de conjuntos se obtiene:

A. $A\cup B$ B. A C. $A-B$ D. $A\cap B$ E. $B-A$

Solución
$\equiv [A-(B\cap A^c)]\cap[(B-A)\cap A]^c$... recuerde que $A-B\equiv A\cap B^c$
$\equiv \left[A\cap(B\cap A^c)^c\right]\cap[(B\cap A)\cap A]^c$... ley de Morgan
$\equiv [A\cap(B^c\cup A)]\cap[\varnothing]^c$
$\equiv A\cap U\equiv A$

Ejercicio 2.7 Sea $U = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 11\}$ tal que $A \subset U$, $B \subset U$, donde

$$A = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in U / x = 2k, k \in U\}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?:

A. $(A \cup B)^c = \left\{x \in U / x^2 - 16x + 63 = 0\right\}$

B. $(A^c \cap B^c) \neq U - \{9\}$

C. $(A - B)^c \neq A^c \cup (A \cap B)$

D. $B - A \neq \{8,10\}$

Solución
Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{2,4,6,8,10\}$.

$$\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= \{7,9\} = \left\{x \in U / x^2 - 16x + 63 = 0\right\}. \\
(A^c \cap B^c) &= (A \cup B)^c = \{7,9\} \neq \{1,2,3,4,5,6,7,8,10\} = U - \{9\}. \\
(A - B)^c &= \{2,4,6,7,8,9,10\} \neq A^c \cup (A \cap B) = \{2,4,6,7,8,9,10\}. \quad \text{Falsa} \\
B - A &= \{6,8,10\} \neq \{8,10\}.
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 2.8 Si $n[P(A)] = 128$, $n[P(B)] = 32$ y $n[P(A \cap B)] = 8$, encuentre

$$n[P(A \cup B)].$$

A. 256 B. 512 C. 128 D. 1024 E. 64

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Si} \quad n[P(A)] &= 128 \rightarrow n[P(A)] = 2^7 \rightarrow n(A) = 7 \\
n[P(B)] &= 32 \rightarrow n[P(B)] = 2^5 \rightarrow n(B) = 5 \\
n[P(A \cap B)] &= 8 \rightarrow n[P(A \cap B)] = 2^3 \rightarrow n(A \cap B) = 3 \\
n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cup B) \\
n(A \cup B) &= 7 + 5 - 3 = 9 \\
\therefore \quad n[P(A \cup B)] &= 2^9 = 512
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 2.9 Un grupo de 41 estudiantes de idiomas que hablan inglés, francés o alemán, son evaluados mediante un examen de verificación. Se determinó que 22 hablan inglés y 10 solamente inglés; 23 hablan francés y solamente francés; 19 hablan alemán y solamente alemán. ¿Cuántos hablan inglés, francés y alemán?

A. 6 B. 9 C. 4 D. 5 E. 8

Solución
Consideremos el diagrama de Venn-Euler dado por la figura 2.8:

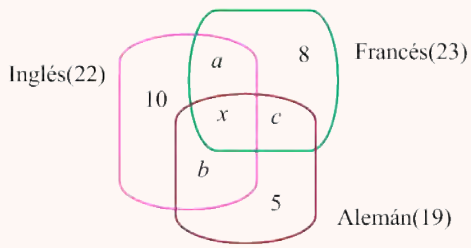


Figura 2.8

$$10 + a + b + x = 22 \to a + b + x = 12 \quad (1)$$
$$8 + a + c + x + c = 23 \to a + c + x = 15 \quad (2)$$
$$5 + b + c + x = 19 \to b + c + x = 14 \quad (3)$$
Sumando las ecuac. (1)+(2)+(3): $2(a + b + c) + 3x = 41 \quad (4)$
Además: $10 + a + 8 + b + x + c + 5 = 41$
$$\to a + b + c + x = 18 \quad (5)$$
Luego, $(4) - 2(x(\cdot(5) \to x = 5$

■

Ejercicio 2.10 Si los conjuntos A y B son tales que $n\,(A \cup B) = 30$, $n\,(A - B) = 12$ y $n\,(B - A) = 10$. Entonces, $n\,(A) + n\,(B)$ es:

A. 24 B. 19 C. 38 D. 35 E. 16

Solución

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\
\rightarrow 30 &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \qquad (1)\\
n(A-B) &= n(A)-n(A\cap B)\\
\rightarrow 12 &= n(A)-n(A\cap B) \qquad (2)\\
n(B-A) &= n(B)-n(A\cap B)\\
\rightarrow 10 &= n(B)-n(A\cap B) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Restando (1) - (2): $n(B)=18$ y restando (1) - (3): $n(A)=20$

$\therefore n(A)+n(B)=38$

■

Problemas propuestos

Problema 2.1 Sean los conjuntos $U=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A\cup B=\{a,b,d,e\}$, $A\cap B=\{e\}$, $A-B=\{a\}$. Determine:

A. Los conjuntos A y B B. $n(A)$ C. $n\left[(A\cup B)^c\right]$

Problema 2.2 Sea $U=\{x\in N/x\leq 20\}$ y los subconjuntos de U tales que
$A=\{x\in N/x<20,\ x\ par\}$, $B=\{4,6,7,9\}$, $C=\{x\in N/1\leq x\leq 5\}$.
Determine:

A. $(A\cap C^c)^c$ B. $[(A\cup B)\cap C]^c$ C. $A-(B\cap C)$ D. $(A\cap B\cap C)$

Problema 2.3 Si $n(A\cup B)=19$, $n(A\cap B)=5$ y $n(A)=2n(B)$, determine $n(A)$ y $n(B)$.
Solución: 16 y 8.

Problema 2.4 En un vuelo comercial procedente de Madrid descienden 190 turistas. Se sabe que 62 eran mexicanos, 79 eran españoles, 92 eran ingenieros; de estos últimos, 32 eran mexicanos y 28 españoles.
¿Cuantos turistas eran ingenieros, pero no españoles ni mexicanos?
Solución: 32

Problema 2.5 En una encuesta a 100 inversionistas, se observó lo siguiente: 60 personas poseían acciones, 35 poseían valores, 50 eran propietarios de bonos, 12 poseían acciones y valores, 13 tenían valores y bonos y 30 eran propietarios de acciones y bonos. Si todos manifestaron que poseen a lo menos una inversión, usando un diagrama de Venn-Euler determine:

A. ¿Cuántos invertían en los tres productos?

B. ¿Cuántos inversionistas solo tenían bonos?

Solución: A. 10 B. 17

Problema 2.6 A,B y C son conjuntos tal que $C\subset A'$. Simplifique usando propiedades de conjunto:

$$\left[[(C\cup B)\cap A]\cup C'\right]\cap A$$

Solución: $C'\cap A$

Problema 2.7 De 55 estudiantes de una universidad se obtuvo la siguiente información: 32 estudian el curso A, 22 estudian el curso B, 45 estudian el curso C y 10 estudian los tres cursos. ¿Cuántos alumnos estudian simultáneamente dos cursos?
Solución: 24 alumnos.

Problema 2.8 A,B,C son conjuntos tales que $A\subset C$ y $B\subset C$ y además $n(C)=120$, $n(A\cup B)=90$, $n(A\cap B)=30$, $n(A)=n(B)+30$. Encuentre:

A. $n[(C-B)\cap A]$ B. $n[(A\cup B)-(A\cap B)]$

Solución: A. 45 B. 60

Problema 2.9 Simplifique usando propiedades de conjuntos:

$$[A - (B \cap A^c)] \cap [(B - A) \cup A]$$

Solución. A

Problema 2.10 Una empresa alimenticia lanza al mercado tres productos que son etiquetados como A, B, C respectivamente. Se hace una encuesta a un cierto número de personas que alguna vez han consumido por lo menos uno de estos tres productos, dándose los siguientes resultados: 23 personas han consumido solo C; 35 personas han consumido C y nunca han probado B; 53 personas han consumido A y B; 40 personas han consumido A, B y C; 1 persona ha consumido B y C, pero no A; 31 personas han consumido solo A y 69 personas que han consumido A o B, nunca han consumido C.
Con la información dada construye un diagrama de Venn-Euler y determine:

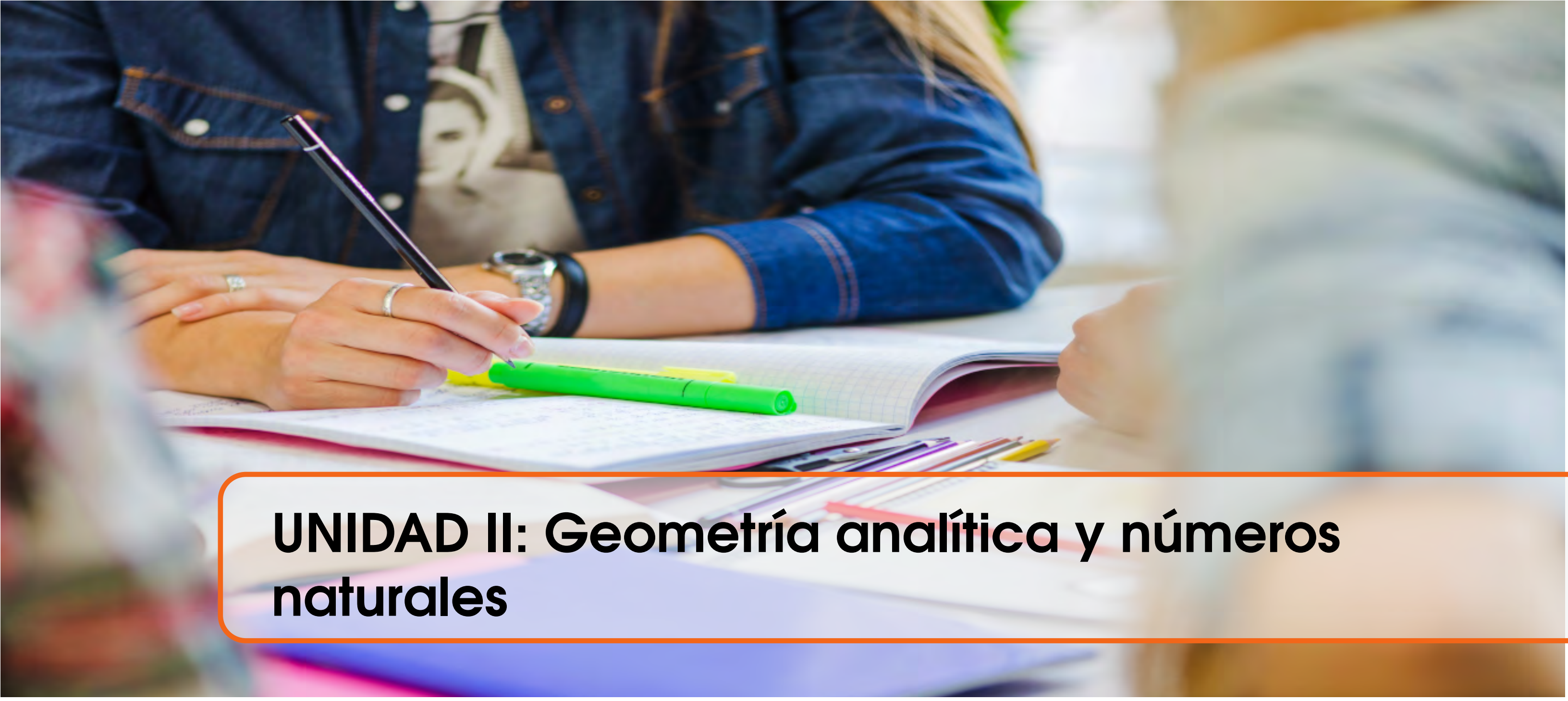
A. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
B. ¿Cuántas personas han probado C?

Solución: A. 145 B.76

Problema 2.11 Una encuesta realizada a 300 personas en relación con los medios de comunicación (R: radio, I: internet y T: televisión) que más utilizan para informarse ha arrojado la siguiente información: 65 personas solo se informan por radio; 40 personas se informan por internet y televisión; 90 personas se informan por internet, pero no por televisión; 65 personas se informan por radio y televisión; 55 personas se informan por radio e internet; 35 personas no utilizan ninguno de estos tres medios de información y 25 personas se informan por estos tres medios.
Usando un diagrama de Venn-Euler, determine: ¿cuántas personas se informan de las noticias...?

A. Por internet.
B. Solo por uno de estos medios de comunicación.
C. Solo por televisión.
D. A lo más por dos medios de comunicación.
E. Por televisión o internet, pero no por radio.

Solución: A. 130 B. 155 C. 30 D. 275 E. 105



UNIDAD II: Geometría analítica y números naturales

Resultados de Aprendizaje

R1. Utilizar las propiedades de la geometría analítica para la resolución de problemas que involucran lugares geométricos en el plano.

R2. Aplicar los conceptos de suma finita para la resolución de problemas que involucren sucesiones de números naturales.

R3. Resolver problemas del ámbito de la ingeniería, negocios, biología y otros, mediante el uso de progresiones aritméticas y geométricas.

R4. Utilizar los números factoriales y la combinatoria para dar respuesta a problemas matemáticos.

Contenidos

- La recta: pendiente, rectas paralelas y perpendiculares, representación gráfica.
- La circunferencia: ecuación, aplicaciones, representación gráfica.
- La parábola: ecuación, aplicaciones, representación gráfica.
- Sumatorias.
- Progresión aritmética y geométrica.
- Teorema del binomio.

3. Rectas

Resumen

Distancia entre dos puntos

Sean los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$. La distancia d entre los puntos P y Q está dada por la expresión:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia de un punto a una recta

Dado el punto $P(x_1,y_1)$ fuera de una recta L, la distancia del punto P a la recta $L: ax + by + c = 0$ es la longitud del trazo perpendicular trazado desde el punto P a la recta L y viene dado por la fórmula:

$$d(P(x_1,y_1),L) = \frac{|a(x_1) + b(y_1) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ángulo de inclinación

Se llama ángulo de inclinación de una recta L al ángulo que forma esta recta con el eje x. La medida del ángulo se toma en sentido contrario a las agujas del reloj.

Pendiente o coeficiente angular

Se llama pendiente o coeficiente angular de una recta L a la medida de la tangente de su ángulo de inclinación. Se designa por la letra m, así $m = tan(\alpha)$. Para los puntos $P(x_1,x_2)$ y $Q(y_1,y_2)$ de una recta L, el valor de la pendiente m se obtiene por la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_1 \neq x_2$$

Rectas paralelas

Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Entonces, L_1 será paralela a L_2 si y solo si tienen el mismo ángulo de inclinación, o bien sus pendientes son iguales, es decir:

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces, L_1 será perpendicular a L_2 si y solo si se verifica la relación $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, es decir:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente

Considere $P(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la recta L y sea m su pendiente. Entonces, la ecuación de la recta viene dada por:

$$L : y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación simétrica de la recta

Considere una recta que corta los ejes coordenados x e y en los puntos $P(a, 0)$ y $Q(0, b)$ respectivamente. Entonces, la ecuación de la recta viene dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación de la recta dado dos puntos

Considere $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera de la recta L con $x_1 \neq x_2$. Entonces, la ecuación de la recta viene dada por:

$$L : y - y_1 = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{m}(x - x_1)$$

Intersección de rectas

Si queremos estudiar las posiciones relativas de dos rectas L_1 y L_2 en el plano, debemos resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) Si las rectas son coincidentes, el sistema tendrá infinitas soluciones.

b) Si las rectas son paralelas, el sistema no tendrá solución.

c) Si las rectas se cortan, el sistema tendrá solución única.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1 Un triángulo cuyos vértices son $A = (4,0)$, $B = (-1,-1)$ y $C = (3,5)$, es:

A. Isósceles y rectángulo.

B. Isósceles, pero no rectángulo.

C. Rectángulo e isósceles.

D. No es rectángulo ni isósceles.

Solución
Sea

$$d(A,B) = \sqrt{(4+1)^2 + (1)^2} = \sqrt{26}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(4-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{26}$$
$$d(C,B) = \sqrt{(3+1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{52}$$

El triángulo es isósceles y rectángulo, en efecto:

$$d(A,B) = d(A,C) \quad \text{y} \quad d^2(A,B) + d^2(A,C) = d^2(C,B)$$

■

Ejercicio 3.2 Si la pendiente de la recta que une los puntos $P(3,-9)$ y $Q(p,2p+3)$ es $-\frac{5}{7}$, encuentre el valor de p:

A. $-\frac{23}{19}$ B. $\frac{23}{14}$ C. $-\frac{69}{19}$ D. $-\frac{99}{14}$

Solución

$$\text{Sea} \quad m_{PQ} = \frac{2p+3-(-9)}{p-3} = -\frac{5}{7}$$
$$\rightarrow \frac{2p+12}{p-3} = -\frac{5}{7}$$
$$\rightarrow 14p + 84 = -5p + 15$$
$$\rightarrow 19p = -69$$
$$\rightarrow p = -\frac{69}{19}$$

■

Ejercicio 3.3 Para que la recta $L: x - 3y + 15 = 0$ sea paralela a la recta K determinada por los puntos $A = (a,b)$ y $B = (-1,2)$, entonces, debe ocurrir que a es:

A. $3b - 7$ B. $3b - 5$ C. $-3b + 5$ D. $-3b + 7$

Solución

$$\text{Sea la recta} \quad L: x - 3y + 15 = 0 \to m = \frac{1}{3}$$
$$\text{La pendiente de recta} \quad K: m_k = \frac{b-2}{a+1}$$
$$\text{Si} \quad L//K \quad \text{si y solo si} \quad m = m_k \to \frac{b-2}{a+1} = \frac{1}{3}$$
$$\to 3b - 6 = a + 1 \leftrightarrow a = 3b - 7$$

■

Ejercicio 3.4 Sean $a \neq 0, b \neq 0$, si la recta $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ contiene a los puntos $P = (2,-3)$ y $Q = (4,-5)$, entonces, (a,b) es igual a:

A. $(1,1)$ B. $(-1,1)$ C. $(1,-1)$ D. $(-1,-1)$ E. $(2,-1)$

Solución

$$\text{Si} \quad P = (2,-3) \in L \to \frac{2}{a} - \frac{3}{b} = 1 \to 2b - 3a = ab \qquad (1)$$
$$\text{Si} \quad Q = (4,-5) \in L \to \frac{4}{a} - \frac{5}{b} = 1 \to 4b - 5a = ab \qquad (2)$$

(2) – (1): $2b - 2a = 0 \to a = b$

Reemplazando en (1):

$2a - 3a = a^2 \to -a = a^2 \to a^2 + a = 0 \to a(a+1) = 0$

$\to a = -1, b = -1,$

$\therefore (a,b) = (-1,1).$

■

Ejercicio 3.5 Los puntos de intersección de las rectas

$$L_1: x + y = 0, \quad L_2: 3x + y - 4 = 0, \quad L_3: x + 3y - 4 = 0$$

corresponden a los vértices de un triángulo. Entonces, el triángulo es:

A. Isósceles B. Equilátero C. Rectángulo D. Escaleno

Solución

Sean $A = L_1 \cap L_2 = (2,-2)$, $B = L_1 \cap L_3 = (-2,2)$, $C = L_2 \cap L_3 = (1,1)$

$$d(A,B) = \sqrt{(-2-2)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$$
$$d(B,C) = \sqrt{(1+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

Existen dos medidas iguales y una distinta, se trata de un triángulo isósceles. ■

Ejercicio 3.6 Sea $L_s : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tal que $a + b = 10$ y paralela a la recta $L : 2x + 3y = 6$, entonces, la recta L_s es:

A. $2x + 3y = 12$

B. $x + 3y = 9$

C. $3x + 2y = 8$

D. $2x + 3y = 8$

Solución

Considere una ecuación de la forma $L_s : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow a + b = 10$ (1)

y pendiente $m_s = -\frac{b}{a}$. La pendiente de la recta L es $m_L = -\frac{2}{3}$.

Si $L_s // L \rightarrow m = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3} \rightarrow b = \frac{2}{3}a,$ (2)

resolviendo (1) y (2): $a = 6 \wedge b = 4 \rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \rightarrow L_s : 2x + 3y = 12$

■

Ejercicio 3.7 Sean los puntos $A(2,-6)$, $B(4,k)$ y $C(10,-2)$ colineales. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (-2,4)$ y cuya pendiente es k.

A. $y = -5x - 6$

B. $y = 5x + 6$

C. $y + 5x - 6 = 0$

D. $y = 6x + 6$

E. $y = 6x + 5$

Solución

Si los puntos A, B y C han de ser colineales , entonces, $m_{AB} = m_{AC}$

$$m_{AB} = m_{AC} \rightarrow \frac{k+6}{4-2} = \frac{-2+6}{10-2} \rightarrow \frac{k+6}{2} = \frac{4}{8} \rightarrow k + 6 = 1 \rightarrow k = -5$$

La recta que pasa por $P = (-2,4)$ y cuya pendiente tiene valor $k = -5$, es:

$$y - 4 = (-5)(x+2) \to y = -5x - 6$$

■

Ejercicio 3.8 Una recta L_p contiene al punto de intersección de las rectas $L_1 : 2x - 3y + 4 = 0$ y $L_2 : 3x + 4y - 5 = 0$ y es perpendicular a $L_3 : 6x - 7y + 3 = 0$. Entonces, la ecuación de la recta L_p es:

A. $119x + 102y = -125$

B. $119x + 102y - 125 = 0$

C. $119x - 102y = 125$

D. $119x - 102y = -125$

Solución
El punto de intersección de las rectas se obtiene resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} L_1 : 2x - 3y + 4 = 0 \\ L_2 : 3x + 4y - 5 = 0 \end{array}\right| \to x = -\frac{1}{17}, \quad y = \frac{22}{17}$$

El punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 es $(x,y) = \left(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17}\right)$

La pendiente de $\quad L_3 : 6x - 7y + 3 = 0 \to y = \frac{6}{7}x + \frac{3}{7} \to m = \frac{6}{7}$

La recta $\quad L_p \quad$ contiene al punto $\quad \left(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17}\right) \quad$ y su pendiente es $\quad m = -\frac{7}{6}$

$L_p : y - \frac{22}{17} = -\frac{7}{6}\left(x + \frac{1}{17}\right) \to 6\left(y - \frac{22}{17}\right) = -7\left(x + \frac{1}{17}\right)$

$L_p : 6\,(17y - 22) = -7\,(17x + 1)$

$L_p : 119x + 102y = 125$

■

Ejercicio 3.9 El punto $P(a,b)$ se encuentra en la recta $L_1 : 3x + 2y = 13$ y el punto $Q(b,a)$ se encuentra en la recta $L_2 : 4x - y = 5$. Entonces, la ecuación de la recta que contiene a los puntos P y Q es:

A. $x - 2y = 5$ B. $x + y = 5$ C. $x + y = -5$ D. $2x - y = -5$

Solución
La pendiente de la recta que contiene a los puntos P y Q es:

$$m_{PQ} = \frac{a-b}{b-a} = -1 \rightarrow m_{PQ} = -1$$

Por otro lado: $(a,b) \in L_1 : 3x + 2y = 13 \rightarrow 3a + b = 13$.

Si $(b,a) \in L_2 : 4x - y = 5 \rightarrow 4b - a = 5$,

resolviendo el sistema para a y b se obtiene $a = 3$ y $b = 2$.

La recta que contiene a los puntos $P(3,2)$ y $Q(2,3)$ es de la forma:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 2 = -1(x-3) \rightarrow x + y = 5$ ■

Ejercicio 3.10 La ecuación de la recta que contiene al punto de intersección de las rectas $L_1 : 4x - 3y - 1 = 0$ y $L_2 : 5x - 2y - 3 = 0$ y es paralela a la recta $L_3 : 2y - 3x + 2 = 0$, es:

A. $-3x + 2y = -1$

B. $x - 3y = 1$

C. $2x - 3y = 1$

D. $2x - y = 1$

Solución
En la intersección de las rectas
$\left.\begin{array}{l} 4x - 3y - 1 = 0 \\ 5x - 2y - 3 = 0 \end{array}\right| \rightarrow (x,y) = (1,1)$

la pendiente de la recta $2y - 3x + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 1$ es $m = \frac{3}{2}$

y la ecuación requerida es $y - 1 = \frac{3}{2}(x-1) \rightarrow 2(y-1) = 3(x-1)$

$$\rightarrow 2y - 2 = 3x - 3 \rightarrow -3x + 2y = -1$$

■

Problemas propuestos

Problema 3.1 Los puntos $A=(-3,8)$, $B=(1,-2)$ y $C(5,4)$ corresponden a los vértices de un triángulo. Determine:

A. Su perímetro.

B. Las ecuaciones de las rectas que contienen a cada uno de los lados.

Solución: A. 26.93 B. $L_1: y=-0.5x+6.5$, $L_2: y=1.5x-3.5$, $L_3: y=-2.5x+0.5$

Problema 3.2 Sean $A=(4,k)$ $B=(10,-2)$, $C=(2,-6)$, y puntos colineales. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $P=(4,-2)$ y cuya pendiente es k.
Solución: $5x+y=18$

Problema 3.3 Los puntos de intersección de las rectas

$$L_1: x+y=0,\ L_2: 3x+y-4=0 \text{ y } L_3: x+3y-4=0$$

corresponden a los vértices de un triángulo. Clasifique el triángulo.
Solución: Isósceles.

Problema 3.4 Si las rectas $L_1: x+y+1=0$; $L_2: 4x+3y+4=0$ y $L_3: x+ay+b=0$ son concurrentes (se intersectan en un solo punto) tal que $a^2+b^2=2$, determine los valores de a y b.
Solución: $a=\pm 1$, $b=1$.

Problema 3.5 Dadas las rectas $L_1: 3x-2ky-9=0$ y $L_2: 4x+y-1=0$, determine el valor de la constante k de modo que las rectas L_1 y L_2 sean:

A. paralelas B. perpendiculares

Solución: A. $k=-3/8$ B. $k=6$

Problema 3.6 Sea el triángulo rectángulo cuyos vértices son $P=(2,-2)$, $Q=(-8,4)$ y $R=(5,3)$, demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

Problema 3.7 Se sabe que la recta $L_1: -x+y=1$ corta al eje X en el punto A, y la recta $L_2: 4x+5y=20$ corta al eje Y en el punto B. Encuentre la ecuación de la recta L_3 que contiene a los puntos A y B.
Solución: $A=(-1,0)$, $B=(0,4)$, $L_3: -4x+y=4$.

Problema 3.8 Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-4,1)$, $B(-3,3)$ y $C(3,-3)$.

A. Halle la longitud de la altura del vértice A sobre el lado $\overline{BC}$.

B. Determine el área del triángulo.

Solución: A. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ unidades lineales B. 9 unidades cuadradas

Problema 3.9 Una recta L_a contiene el punto de intersección de las rectas $L_1: 3x-y=6$ y $L_2: 4x+y=1$, y además, es perpendicular a la recta de ecuación $L_3: 3x+2y=6$.

A. Encuentre la intersección de las rectas L_1 y L_2.

B. Halle la ecuación de la recta L_a.

Solución: A. $(1,-3)$ B. $-2x+3y=-11$

Problema 3.10 Determine la distancia del punto $P=(3,4)$ a la recta $L: 3x-4y=12$.
Solución: $d=3.8$

Problema 3.11 Determine la distancia entre las rectas paralelas

$$L_1: 4x-3y-18=0 \text{ y } L_2: 4x-3y=0.$$

Solución: $d=3.6$

Problema 3.12 En las ecuaciones $L_1: ax+(2-b)y-23=0$ y $L_2: (a-1)x+by+15=0$, encuentre los valores de a y b para que las rectas se intersecten en el punto $P=(2,-3)$.
Solución: $a=4,\quad b=7$.

Problema 3.13 Una recta K contiene al punto de intersección de las rectas $L_1: 2x-3y+4=0$ y $L_2: 3x+4y-5=0$ y además es perpendicular a la recta de ecuación $L_3: 6x-7y+3=0$.
Determine la ecuación de la recta K.
Solución: $119x+102y-125=0$

4. La circunferencia

Resumen

Definición

Definición 4.1 Circunferencia es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo C del mismo plano (ver fig 4.1), esto es $|\overline{CP}| = r$. El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia constante se llama radio.

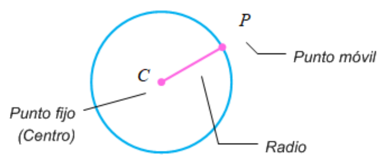


Figura 4.1

Ecuación de la circunferencia

- **Forma principal**. Centro $C = (h,k)$ y radio r (ver fig 6.1) tiene por ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

- **Forma canónica.** Centro $C = (0,0)$ y radio r, su ecuación es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- **Forma general.** La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia de radio diferente de cero si y solo si $D^2 + E^2 - 4F > 0$.
  Las coordenadas del centro son $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y su radio es $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1 Una circunferencia tiene su centro en $C = (1, -3)$ y es tangente a la recta $L : 3x - 4y - 5 = 0$. Entonces, el radio de la circunferencia es:

A. 2 B. 4 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$ E. $\frac{2}{5}$

Solución
Sea r la distancia desde el centro de la circunferencia a la recta L:

$$r = d(C, L) = \frac{|3(1) - 4(-3) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10|}{5} = 2 \to r = 2$$

■

Ejercicio 4.2 El punto $P(x, y)$ diametralmente opuesto al punto $(1, 0)$ en la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ es:

A. $(-3, 4)$ B. $(3. -4)$ C. $(-3, -4)$ D. $(3, 4)$

Solución

Sea $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

$\to (x+1)^2 + (y+2)^2 = 8 \to C(h, k) = (-1, -2)$.

El punto (x, y) requerido es tal que

si $\frac{x+1}{2} = -1 \to x + 1 = -2 \to (x = -3)$

y si $\frac{y+0}{2} = -2 \to (y = -4)$,

$\therefore$ $(x, y) = (-3, -4)$.

■

Ejercicio 4.3 Si las ecuaciones $L_1 : x + y = 6$ y $L_2 : x + 2y = 4$ representan dos diámetros de una circunferencia de $r = 10$, entonces, la ecuación de la circunferencia es:

A. $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 32 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 32 = 0$
C. $x^2 + y^2 + 16x + 4y - 32 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 16x - 4y - 32 = 0$

Solución

Si L_1 y L_2 son diámetros de la circunferencia, entonces, su centro es

$$C = L_1 \cap L_2 \to C = (8, -2) \wedge r = 10.$$

Luego, $(x-8)^2 + (y+2)^2 = 100 \to x^2 + y^2 - 16x + 4y - 32 = 0$. ■

Ejercicio 4.4 La ecuación de la tangente a la circunferencia en el punto $T(1, -1)$ cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $L_1 : x - y = 1$ y $L_2 : 2x + y = 3$, es:

A. $x - 3y = 4$

B. $3x - y = 4$

C. $x + 4y + 3 = 0$

D. $4x + 3y = 0$

Solución
Sea

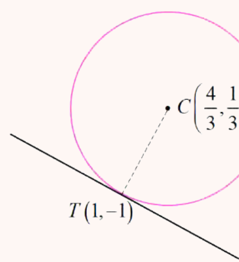


Figura 4.2

Se tiene que el centro es $C = L_1 \cap L_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (ver figura 4.2). La pendiente de la recta tangente es

$$m_T = -\frac{1}{m_\perp} \to m_T = -\frac{1/3}{4/3} = -\frac{1}{4} \to m_T = -\frac{1}{4}$$

$\therefore \quad y + 1 = -\frac{1}{4}(x-1)$
$\to 4y + 4 = -x + 1 \to x + 4y + 3 = 0$ ■

Ejercicio 4.5 Encuentre el radio de la circunferencia que pasa a través del punto de intersección de las rectas $L_1 : 3x - 2y - 1 = 0$ y $L_2 : 4x + y - 27 = 0$ y cuyo centro es el punto $C(2, -3)$.

A. $\sqrt{109}$ B. 10 C. $\sqrt{92}$ D. 92

Solución
Se tiene que $L_1 \cap L_2 = (5,7)$, luego, el radio es:

$$r = \sqrt{(5-2)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}$$

■

Ejercicio 4.6 La circunferencia $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 5$ intercepta la recta $3x - 4y = m$ en dos puntos distintos si:

A. $-35 < m < 15$

B. $15 < m < 65$

C. $35 < m < 85$

D. $-85 < m < -35$

Solución
Si $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 5 \to (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$, luego, el centro es $(2,4)$ y $r = 5$.
Si la circunferencia intersecta la recta $3x - 4y = m$ en dos puntos distintos, entonces, la longitud de la perpendicular del centro es menor que el radio.
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{|3(2) - 4(4) - m|}{5} < 5 \to \frac{|-10 - m|}{5} &\to |10 + m| < 25 \\ &\to -25 < m + 10 < 25 \\ &\to -35 < m < 15 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 4.7 Sean las circunferencias

$$S_1 : x^2 + y^2 + 8x + 10y + 5 = 0, \quad S_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$$

La ecuación de la circunferencia concéntrica con S_1 y que pasa a través del centro de S_2 es:

A. $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 59 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 59 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 87 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$

Solución

Sean

$$S_1 : x^2 + y^2 + 8x + 10y - 5 = 0 \rightarrow (x+4)^2 + (y+5)^2 = 36 \rightarrow C_1 = (-4,-5)$$
$$S_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0 \rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13 \rightarrow C_2 = (2,3)$$

La circunferencia requerida tiene su centro en C_1 y pasa por C_2,

$$\therefore \quad r = d\,(C_1C_2) = \sqrt{(-4-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{100} = 10 \rightarrow r = 10$$
$$\rightarrow (x+4)^2 + (y+5)^2 = 100$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 + 8x + 10y - 59 = 0$$

■

Ejercicio 4.8 Encuentre la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje y en el punto $P = (0,-3)$ e intercepta una longitud de 8 unidades sobre el eje x.

A. $x^2 + y^2 \pm 10x + 6y + 9 = 0$

B. $x^2 + y^2 \pm 6x + 10y + 10 = 0$

C. $x^2 + y^2 \pm 14x + 6y + 9 = 0$

D. $x^2 + y^2 \pm 8x + 6y + 9 = 0$

Solución
Sea

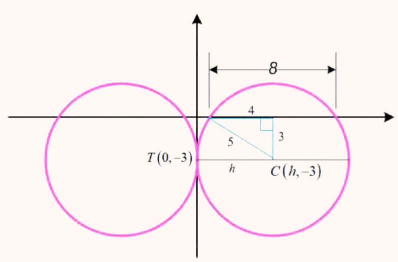


Figura 4.3

En la figura 4.3 se observa que $r = h$, entonces, $r = 5$ y el centro es $C(5,-3)$.
Si consideramos la circunferencia del lado derecho, se tiene que

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 25 \longleftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0.$$

Si consideramos la circunferencia del lado derecho, el centro $C(-5,-3)$ y la ecuación de la circunferencia es

$$(x+5)^2 + (y+3)^2 = 25 \longleftrightarrow x^2 + y^2 + 10x + 6y + 9 = 0.$$

■

Ejercicio 4.9 La ecuación del círculo inscrito en el triángulo, formado por los ejes coordenados y la recta $L: 12x+5y=60$, viene dada por:

A. $x^2+y^2-4x-4y+4=0$

B. $x^2+y^2+4x+4y+4=0$

C. $x^2+y^2-4x-4y-4=0$

D. $x^2+y^2+4x-4y-4=0$

Solución
Si el radio de la círcunferencia es $r=a$, entonces, el centro es $C=(a,a)$. Además, la distancia de C a la recta L es

$$d=\frac{|12(a)+5(a)-60|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|17(a)-60|}{13}=a$$

$\to |17(a)-60|=13a$
$\to 17a-60=\pm 13a\$$
$\to 17a\mp 13a=60$
$\to 4a=60 \vee \quad 30a=60 \quad \therefore\ a=15\vee a=2.$

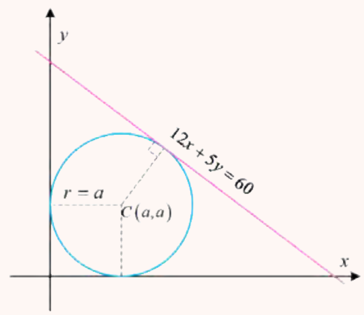


Figura 4.4

De la figura 4.4 se deduce que $a\neq 15 \quad \therefore\ a=2$
La ecuación es $(x-2)^2+(y-2)^2=2^2\to x^2+y^2-4x-4y+4=0.$ ■

Ejercicio 4.10 Los centros de las circunferencias

$$C_1: x^2+y^2=1, \quad C_2: x^2+y^2+6x-2y=1, \quad C_3: x^2+y^2+2x-6y=4$$

corresponden a los vértices de un triángulo:

A. Isósceles B. Equilátero C. Escaleno

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Sean}\quad & x^2+y^2=1\to C_1=(0,0)\\
& x^2+y^2+6x-2y=1\\
& \to (x+3)^2+(y-1)^2=11\to C_2=(-3,1)\\
& x^2+y^2+2x-6y=4.\\
& \to (x+1)^2+(y-3)^2=14\to C_3=(-1,3)\\
\text{Luego,}\quad & d(C_1C_3)=\sqrt{10},\quad d(C_1C_2)=\sqrt{10},\quad d(C_2C_3)=\sqrt{8}.
\end{aligned}$$

$\therefore$ los centros C_1, C_2 y C_3 son los vértices de un triángulo isósceles.

■

Ejercicio 4.11 Si dos circunferencias

$$S_1 : (x-4)^2 + (y-7)^2 = 36$$

y

$$S_2 : x^2 + y^2 - 16x - 20y + 164 = r^2$$

se cortan en dos puntos distintos, entonces:

A. $1 < r < 11$

B. $r > 11$

C. $0 < r < 1$

D. $r = 11$

Solución
Si $S_1 : (x-4)^2 + (y-7)^2 = 36$ entonces $C_1(4,7) \wedge r_1 = 6$
Si $S_2 : x^2 + y^2 - 16x - 20y + 164 = r^2$, entonces, su forma canónica es:
$S_2 : (x-8)^2 + (y-10)^2 = r^2 \rightarrow C_2(8,10) \wedge r_2 = r$.
Las circunferencias se intersectan si $|r_1 - r_2| < d(C_1C_2) < r_1 + r_2$

$$|6-r| < \sqrt{(4-8)^2 + (7-10)^2} < r+6 \rightarrow |6-r| < 5 < r+6$$

Si $5 < r+6, \forall r$ entonces $|r-6| < 5 \leftrightarrow -5 < r-6 < 5 \rightarrow 1 < r < 11$.

Ejercicios propuestos

Problema 4.1 Geométricamente, entre una recta y una circunferencia puede ocurrir una de las siguientes situaciones: que no se corten, que la recta sea tangente a la circunferencia, o bien que la recta sea secante a la circunferencia.
Determine cuál de estos casos ocurre entre la recta $L: 7x - y - 22 = 0$ y la circunferencia $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$.
Solución: La recta es secante a la circunferencia y los puntos de intersección son $(4,6)$ y $\left(\frac{77}{25}, -\frac{11}{25}\right)$.

Problema 4.2 Encuentre la ecuación general de la circunferencia C_1, concéntrica a la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ y cuyo radio es la mitad del radio de la circunferencia C.
Solución: $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 25 = 0$

Problema 4.3 Determine la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ cuyo centro se encuentra en la recta $L: 3x - y - 8 = 0$ y además contiene a los puntos $P(3,5)$ y $Q(7,1)$.
Solución: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

Problema 4.4 Determine la ecuación general de una circunferencia, si los extremos de una de sus cuerda son los puntos $P(2,7)$ y $Q(4,1)$ y además se sabe que tiene su centro sobre el eje y.
Solución: $x^2 + y^2 - 6y - 11 = 0$

Problema 4.5 Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$. Encuentre la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$, que contiene el centro de la circunferencia y es perpendicular a la recta $L: 2x - 5y + 8 = 0$.
Solución: $-5x - 2y + 29 = 0$

Problema 4.6 Halle la ecuación de la circunferencia de radio 3 y cuyo centro se encuentra en el punto de intersección de las rectas

$$L_1: x - y - 5 = 0 \quad \text{y} \quad L_2: x + 3y + 3 = 0.$$

Solución: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

Problema 4.7 Si las circunferencias

$$C_1: (x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2 \quad \text{y} \quad C_2: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

se intersectan en dos puntos, halle los posibles valores de r.
Solución: $2 < r < 8$

Problema 4.8 Si las coordenadas de los puntos extremos de un diámetro de la circunferencia son $A(-1,2)$ y $B(4,-3)$. Encuentre su ecuación.
Solución: $x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0$

Problema 4.9 Una circunferencia contiene a los puntos $A = (-3,3)$ y $B = (1,4)$ y su centro está sobre la recta $L: 3x - 2y - 23 = 0$. Determine su ecuación.
Solución: $(x-2)^2 + (y+17/2)^2 = 629/4$

Problema 4.10 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 30x + 6y + 109 = 0$$

en el punto $P(4,-1)$.
Solución: $-11x+2y+46=0$

Problema 4.11 La recta $L_1 : 2x-y+1=0$ es tangente a la circunferencia en el punto $T(2,5)$ y el centro se encuentra sobre la recta $L_2 : x-2y=4$. Halle el radio de la circunferencia.
Solución: $r=3\sqrt{5}$

5. La parábola

Resumen

Definición

Definición 5.1 La parábola se define como el conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija llamada directriz (ver fig. 5.1).
La perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama eje de simetría o eje de la parábola. El punto de intersección entre el eje de simetría y la parábola se llama vértice de la parábola.

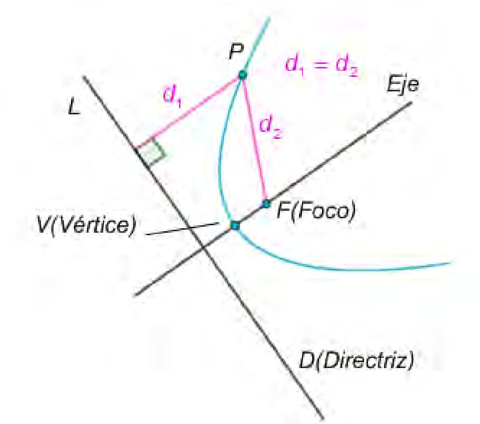


Figura 5.1

Ecuación estándar de la parábola

La ecuación estándar de la parábola con vértice en $(0,0)$, foco sobre un eje y $p > 0$ está dada por alguna de las siguientes formas gráficas (ver fig 5.2).

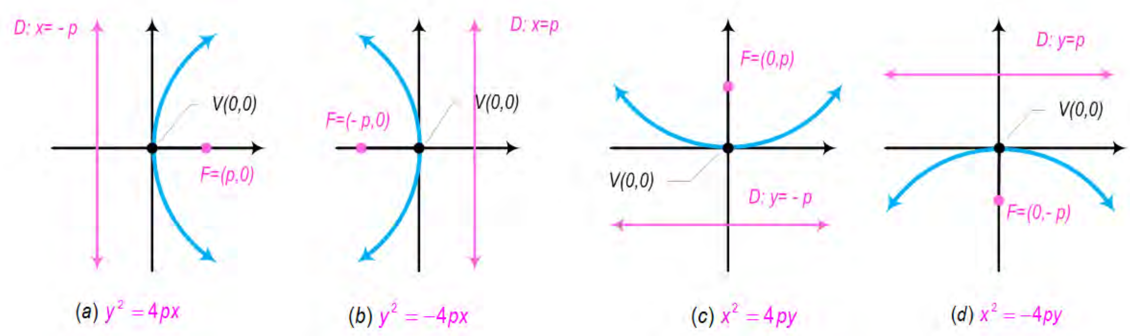


Figura 5.2

Ecuación de la parábola con centro (h,k)

Si el eje focal de la parábola es paralelo al eje x (ver fig.5.3) y $p > 0$, su ecuación es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Además:

- El vértice es $V(h,k)$.
- El foco corresponde a $F(h+p,k)$.
- La directriz es $x = h - p$.
- La longitud del lado recto es $L = |4p|$.

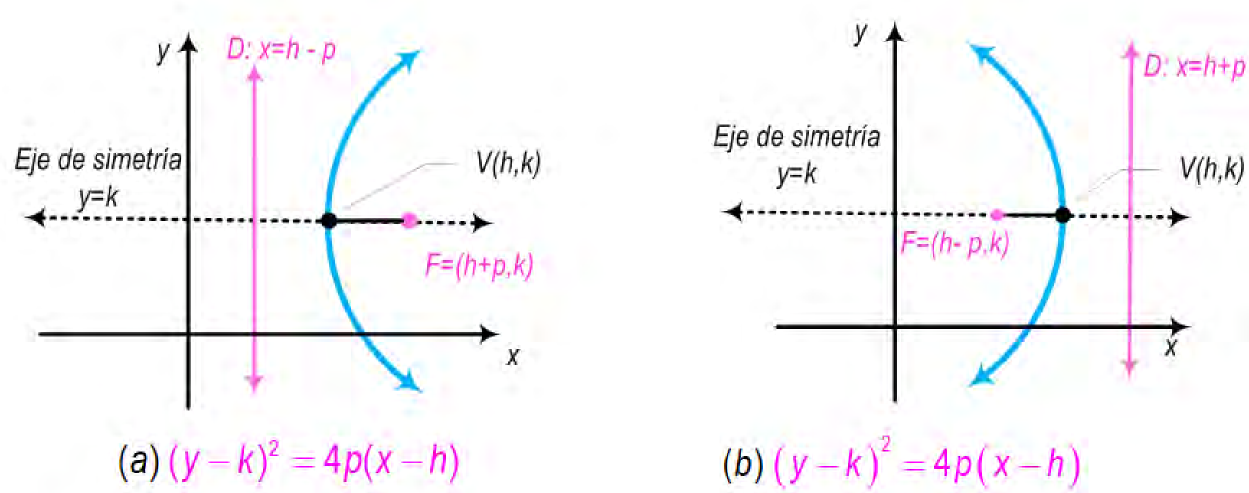


Figura 5.3

Si el eje focal de la parábola es paralelo al eje y (ver fig. 5.4), entonces, su ecuación será:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Además:

- El vértice es $V(h,k)$.
- El foco corresponde a $F(h,k+p)$.
- La directriz es $y = k - p$.
- La longitud del lado recto es $L = |4p|$.
- La longitud del lado recto es $L = |4p|$.

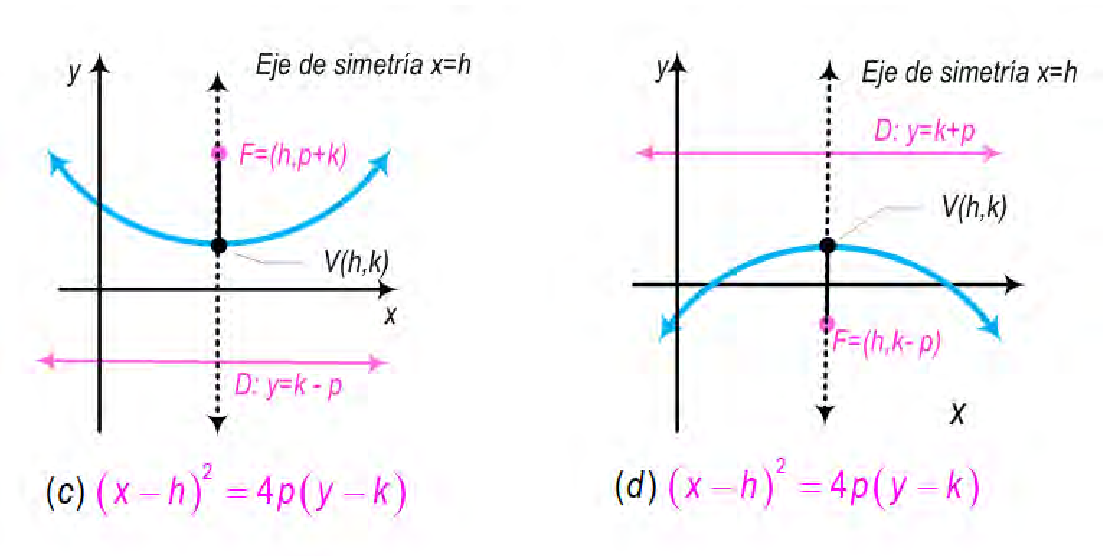


Figura 5.4

Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1 Los puntos de la parábola $y^2 = 12x$ cuya distancia al foco es 4 unidades, son:

A. $(1,2\sqrt{3}),(1,-2\sqrt{3})$
B. $(2,\sqrt{3}),(2,-\sqrt{3})$
C. $(1,2\sqrt{3})$
D. $(1,-2\sqrt{3})$

Solución
Sea $y^2 = 12x$, entonces, $p = 3$ y las coordenadas del foco F es (3,0). Y sea $P = (a,b)$ un punto cualquiera de la parábola de modo que:

$$\begin{aligned}
d(F,P) = 4 \to \sqrt{(a-3)^2 + (b-0)^2} &= 4 \\
(a-3)^2 + b^2 = 16 \wedge b^2 &= 12a \\
(a-3)^2 + 12a &= 16 \\
a^2 - 6a + 9 + 12a &= 16 \\
a^2 + 6a - 7 &= 0 \\
(a-1)(a+7) &= 0 \\
a &= 1,\ a = -7 \\
\text{Si} \quad a = 1 \to b^2 = 12 \to b &= \pm 2\sqrt{3} \\
\therefore\ P_1 = \left(1,2\sqrt{3}\right), P_2 &= \left(1,-2\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Si $a = -7$, no existe un valor para b. ■

Ejercicio 5.2 La distancia del foco a un punto $P(x,y)$ de la parábola $y^2 = 16x$ cuya ordenada es el doble de la abscisa, es:

A. 8 B. 6 C. 10 D. 12 E. 9

Solución
Sea $F(4,0)$ el foco de coordenadas y sea $P(x,y)$ tal que $y = 2x$, sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$\begin{aligned}
&\to y^2 = 16x \to (2x)^2 = 16x \\
&\to 4x^2 - 16x = 0 \\
&\to 4x(x-4) = 0 \to x = 0, x = 4 \\
&\text{Si} \quad x = 4 \to y = 8 \to P = (4,8) \\
&. \to d(F,P) = \sqrt{(4-4)^2 + (8-0)^2} = 8
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3 Una parábola tiene su vértice en el origen; su eje se encuentra a lo largo del eje x y pasa por el punto $P(2,3)$. La ecuación de la parábola es:

A. $y^2 = \frac{4}{9}x$ B. $y^2 = \frac{9}{2}x$ C. $4y^2 = 9x$ D. $y^2 = \frac{3}{2}x$

Solución
Se requiere una ecuación de la forma:

$$y^2 = 4px$$

Si $P(2,3)$ pertenece a la parábola, entonces, $9 = 4a(2) \to p = \frac{9}{8}$

y, luego, $y^2 = 4\left(\frac{9}{8}\right)x \to y^2 = \frac{9}{2}x.$

Ejercicio 5.4 El vértice de una parábola es $V(2,2)$ y las coordenadas de sus extremidades del lado recto son los puntos $P(-2,0)$ y $Q(6,0)$. La ecuación de la parábola es:

A. $x^2 - 4x + 8y - 12 = 0$
B. $x^2 + 4x - 8y + 20 = 0$
C. $y^2 - 4y + 8x - 12 = 0$
D. $x^2 + 4x + 8y - 12 = 0$

Solución
La longitud del lado recto es

$$|4p| = d(P,Q) = \sqrt{(6+2)^2 + (0)^2} = 8 \to |4p| = 8 \to p = \pm 2.$$

La parábola es de posición vertical y cóncava hacia abajo, luego $p = -2$;

su ecuación es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Entonces: $(x-2)^2 = -4(2)(y-2)$

$\to x^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

Ejercicio 5.5 La circunferencia que tiene como centro el vértice de la parábola $y = 5x^2 - 5x + 9$ y cuyo radio es la longitud del lado recto, es:

A. $x^2 + y^2 - x - 15{,}5y + 60{,}27 = 0$

B. $x^2+y^2-x-15{,}5y-60{,}27=0$
C. $x^2+y^2-x+15{,}5y+60{,}27=0$
D. $x^2+y^2+x-15{,}5y+60{,}27=0$

Solución
Sea

$$\begin{aligned}
&y=5x^2-5x+9\\
&y=5\left(x^2-x\right)+9\\
&y=5\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+9-\frac{5}{4}\\
&y=5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}\\
&\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}\left(y-\frac{31}{4}\right)\\
&\text{Vértice}\quad V=\left(\frac{1}{2},\frac{31}{4}\right)\quad \text{y radio}\quad r=|4p|=\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{31}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2\to x^2+y^2-x-15{,}5y+60{,}27=0$$

■

Ejercicio 5.6 La recta $x-2=0$ es la directriz de la parábola $y^2-kx-4=0$, entonces, el valor de k es:

A. -4 B. 4 C. 3 D. 2

Solución
Sea

$$y^2-kx-4=0\to y^2=kx+4\to y^2=k\left(x+\frac{4}{k}\right)$$

El vértice de la parábola es $v=\left(-\frac{4}{k},0\right)$ $|4p|=k\to 4p=k\to p=\frac{k}{4}$

$$d(V,D)=\left|-\frac{4}{k}-2\right|=\left|\frac{4}{k}+2\right|=p\to\left|\frac{4}{k}+2\right|=\frac{4}{k}$$

$$\to\left(\frac{4}{k}+2=\frac{4}{k}\right)\ \vee\left(\frac{4}{k}+2=-\frac{4}{k}\right)\to\varnothing\vee\left(\frac{8}{k}=-2\right)\to k=-4$$

■

Ejercicio 5.7 La distancia desde uno de los extremos del lado recto de la parábola $5y^2 = 4x$ al punto $P(3,0)$ es:

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 8 D. $4\sqrt{3}$

Solución

Si $5y^2 = 4x \to y^2 = \frac{4}{5}x \to |4p| = \frac{4}{5} \to p = \frac{1}{5}$

la ecuación del lado recto es $L : x = \frac{1}{5}$.

La intersección de la parábola con el lado recto es:

$\to 5y^2 = 4x \to y^2 = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)$

$\to y^2 = \frac{4}{25} \to y = \pm\frac{2}{5}$

Los puntos extremos del lado recto son $E_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ y $E_2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

Luego:

$$d(P, E_1) = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{5}\right)^2}$$

$$d(P, E_1) = \sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{200}{25}} = \sqrt{8}$$

$$d(P, E_1) == 2\sqrt{2}$$

■

Ejercicio 5.8 La ecuación de la directriz de la parábola $y^2 + 4y + 4x + 2 = 0$ es:

A. $x = 3/2$ B. $x = -1$ C. $x = 1$ D. $x = -3/2$

Solución

Sea $y^2 + 4y + 4x + 2 = 0$

$y^2 + 4y + 4 + 4x - 2 = 0$

$$\to (y+2)^2 = -4x + 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Vértice de la parábola: $\left(\frac{1}{2}, -2\right) \wedge 4p = -4 \to p = -1, p < 0$

Ecuación de la directriz: $d = h - p \to d = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \to d = \frac{3}{2}$

■

Ejercicio 5.9 La ecuación de la parábola es $(y-k)^2 = 4p(x-h), \quad p > 0$, entonces, el vértice y foco son respectivamente:

A. (h,k) y $(h+p,k)$

B. (h,k) y (p,k)

C. $(h+p,k+p)$ y (h,k)

D. (h,k) y $(h-p,k)$

Solución
Sea $(y-k)^2 = 4p(x-h), p > 0$.
La parábola es de posición horizontal y se abre hacia la derecha. El vértice es $V = (h,k)$.
El foco se encuentra desplazado p unidades hacia la derecha del vértice; el foco es $F = (h+p,k)$. ■

Ejercicio 5.10 La ecuación de la parábola cuyo vértice es $V(-3,-2)$, su eje es horizontal y que pasa por el punto $P(1,2)$, es:

A. $y^2 + 4y - 4x - 8 = 0$

B. $y^2 + 4y - 4x + 8 = 0$

C. $y^2 - 4y + 4x - 8 = 0$

D. $y^2 - 4y + 4x + 8 = 0$

Solución Si el eje de la parábola es horizontal y $V = (-3,-2)$, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$(y+2)^2 = 4p(x+3)$$

Si pasa por $P(1,2)$, entonces, $(2+2)^2 = 4p(1+3) \to 16p = 16$, es decir, $p = 1$.
Por lo tanto, la ecuación de la parábola requerida es:

$$(y+2)^2 = 4(x+3) \to y^2 + 4y - 4x - 8 = 0$$

■

Ejercicios propuestos

Problema 5.1 Determine la ecuación de la directriz de la parábola $4y^2+12x-12y+39=0$.
Solución: $x=-\frac{7}{4}$

Problema 5.2 Encuentre la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $L: 2x+3y+1=0$ en el punto $T(1,-1)$ y pasa por el foco de la parábola $y^2=4x$.
Solución: $3x^2+3y^2-8x+3y+5=0$

Problema 5.3 Sea la parábola dada por $y^2=16x$ y $P(x,y)$ uno de los puntos extremos del lado recto que se encuentra en el primer cuadrante. Si una cuerda de la parábola es dibujada con pendiente -1 y pasa por el punto P, encuentre la longitud de la cuerda:
Solución: $32\sqrt{2}$

Problema 5.4 Encuentre la ecuación de la parábola si:

A. El vértice es $(0,0)$ y la ecuación de su directriz es $y=2$.
B. El vértice es $(0,0)$ y la ecuación de su directriz es $x=-6$.

Solución: A. $x^2+8y=0$ B. $y^2+8x=0$

Problema 5.5 Dada la parábola que tiene ecuación $y^2+6x+10y+19=0$. Determine:

A. Su vértice y foco.
B. La ecuación de la directriz.
C. La longitud del lado recto.
D. Su gráfico de acuerdo a los datos obtenidos.

Solución: A. $(1,-5)$ y $(-0.5,5)$ B. $x=2.5$ C. 6 unidades

Problema 5.6 Encuentre la ecuación canónica de la parábola $(y-k)^2=4p(x-h)$ que tiene vértice el punto $V(-4,5)$ y su foco en el punto $F(-1,5)$.
Solución: $(y-5)^2=12(x+4)$

Problema 5.7 Sea la ecuación de la parábola $y=x^2+x-2$.

A. Reducir a la forma canónica $(x-h)^2=4p(y-k)$.
B. Obtener su vértice y foco.
C. Determine la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz.

Solución: A. $(x+0.5)^2=(y-1.5)$ B. Vértice$=(-0.5,1.75)$ y Foco$=(-0.5,2)$ C. $LLR=1$
Directriz: $y=1.5$

Problema 5.8 Una parábola cuyo vértice está en el origen y su eje de simetría coincide con el eje coordenado y, pasa por el punto (6,-3). Determine la ecuación de la parábola, su foco y su directriz.
Solución: $x^2+12y=0$, Foco $F=(0,-3)$, Directriz $y=3$.

Problema 5.9 Una circunferencia tiene su centro $C(h,k)$ ubicado en el vértice de la parábola

$$x^2-4x-4y=4$$

y además pasa por los extremos del lado recto de la parábola. Determine la ecuación de la circunferencia.
Solución: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$

Problema 5.10 Encuentre la ecuación de una parábola cuyo vértice es el punto $(-1, -2)$, su eje es vertical y pasa por el punto $P = (3,6)$.
Solución: $x^2 + 2x - 2y = 3$

6. Sumatorias

Resumen

Definición

Definición 6.1 Sumatoria
Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión finita, se define la suma de los primeros n términos de la sucesión $\{a_n\}$, es decir, $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ mediante el símbolo $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ tal que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Propiedades de las sumatorias

Sean a_k y b_k sucesiones, $\alpha \in \mathbb{R}$, $r \leq n$, $r, n \in \mathbb{N}_0$ entonces:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_1 = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha = \alpha \cdot n$
4. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \alpha = (n - r + 1) \cdot \alpha$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
8. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r+p}^{n+p} a_{(k-p)}$
9. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k \qquad r \leq i \leq n$
10. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_r$
11. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_r - a_{n+1}$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \cdot r^{k-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ con $r \neq 1$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.1 Encuentre el valor de la expresión $\sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} 2k + \sum_{k=1}^{6} 3k$.

A. 128 B. 162 C. 126 D. 164 E. 108

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} 2k + \sum_{k=1}^{6} 3k &= \sum_{k=1}^{6} (k + 2k + 3k) \\
&= \sum_{k=1}^{6} (6k) \\
&= 6 \sum_{k=1}^{6} k = 6 \cdot \frac{6\,(6+1)}{2} \\
&= 6 \cdot \frac{42}{2} = 6 \cdot 21 = 126
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 6.2 Encuentre el valor de la expresión $\sum_{k=1}^{5} 2k^2 + \sum_{k=1}^{4} 3k^3 - \sum_{k=2}^{6} 4k$.

A. 436 B. 306 C. 303 D. 330 E. 360

Solución
La expresión dada se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} 2k^2 + \sum_{k=1}^{4} 3k^3 - \sum_{k=2}^{6} 4k &= 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + 3\sum_{k=1}^{4} k^3 - 4\sum_{k=2}^{6} k \\
&= 2\frac{5\,(5+1)\,(2\cdot 5+1)}{6} + 3\left[\frac{4\,(4+1)}{2}\right]^2 - 4(2+3+4+5+6) \\
&= 2\cdot 55 + 3[10]^2 - 4\cdot(20) \\
&= 110 + 300 - 80 \\
&= 330
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 6.3 Si $\sum_{i=1}^{n} k_i = 2n^2 + 3n$, entonces, $\sum_{i=6}^{15} k_i$ es igual a:

A. 250 B. 430 C. 356 D. 125 E. 360

Solución

$$\sum_{i=1}^{15} k_i = \sum_{i=1}^{5} k_i + \sum_{i=6}^{15} k_i$$

$$\rightarrow \sum_{i=6}^{15} k_i = \sum_{i=1}^{15} k_i - \sum_{i=1}^{5} k_i = 2(15)^2 + 3(15) - \left[2(5)^2 + 3(5)\right] = 430$$

■

Ejercicio 6.4 Encuentre el valor de la sumatoria $\sum_{k=1}^{n} 3^k = ?$

A. $\frac{3}{2}(3^n + 1)$ B. $\frac{3}{2}(3^n - 1)$ C. $\frac{2}{3}(3^n - 1)$ D. $\frac{3}{4}(3^n - 1)$

Solución

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^n \quad \text{factoriza por 3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3\left(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{n-1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3\left(1 + \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{n-1} + 3^n}_{\downarrow} - 3^n\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3\left(1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k - 3^n\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3 + 3\sum_{k=1}^{n} 3^k - 3^{n+1}$$

$$3^{n+1} - 3 = 2\sum_{k=1}^{n} 3^k$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}(3^n - 1) = \sum_{k=1}^{n} 3^k$$

■

Ejercicio 6.5 Halle el valor de $E = \sum_{k=1}^{5}(3k-1) - \sum_{k=1}^{5} 6$.

A. $E = 10$ B. $E = 20$ C. $E = 12$ D. $E = 16$ E. $E = 24$

Solución

$$E = \sum_{k=1}^{5}(3k-1) - \sum_{k=1}^{5} 6$$
$$E = 3\sum_{k=1}^{5} k - \sum_{k=1}^{5} 1 - \sum_{k=1}^{5} 6$$
$$E = 3\sum_{k=1}^{5} k - \sum_{k=1}^{5} 7$$
$$E = 3\frac{5 \cdot 6}{2} - 5 \cdot 7 = 45 - 35 = 10$$

■

Ejercicio 6.6 Sean $\sum_{k=1}^{8} {x_k}^2 = 85$, $\sum_{k=1}^{8} x_k = 101$ y $x_9 = 7$. Obtener el valor de $\sum_{k=1}^{9} x_i(x_i - 2)$.

A. 7 B. -56 C. -18 D. 24 E. -82

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{9} x_i(x_i-2) &= \sum_{k=1}^{8} x_i(x_i-2) + x_9(x_9-2) \\
&= \sum_{k=1}^{8} (x_k^2 - 2x_k) + x_9(x_9-2) \\
&= \sum_{k=1}^{8} (x_k^2 - 2x_k) + (x_9)^2 - 2(x_9) \\
&= \sum_{k=1}^{8} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{8} x_k + 49 - 14 \\
&= 85 - 2 \cdot 101 + 49 - 14 \\
&= -82
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 6.7 La expresión $\sum_{k=1}^{k=8} k(k+a) - \sum_{k=2}^{k=9} (k-1)(k-b)$ es equivalente a:

A. $\sum_{k=2}^{k=9} (k-1)(a+b-1)$

B. $\sum_{k=1}^{k=8} (k+1)(a+b-1)$

C. $\sum_{k=2}^{k=9} (k-1)(a+b)$

D. $\sum_{k=2}^{k=9} k(a+b)$

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=8} k(k+a) - \sum_{k=2}^{k=9} (k-1)(k-b) &= \sum_{k=2}^{k=9} (k-1)(k-1+a) - \sum_{k=2}^{k=9} (k-1)(k-b) \\
&= \sum_{k=2}^{k=9} (k-1)\left[(k+a-1)-(k-b)\right] \\
&= \sum_{k=2}^{k=9} (k-1)(a+b-1)
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 6.8 El valor de la sumatoria $\sum_{k=26}^{45} (3k+4)(2k-15)$ es igual a:

A. 127750 B. 147375 C. 134596 D. 145205 E. 121350

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{k=26}^{45} \left(6k^2 - 37k - 60\right) &= \sum_{k=1}^{45} \left(6k^2 - 37k - 60\right) - \sum_{k=1}^{25} \left(6k^2 - 37k - 60\right) \\
&= 6\sum_{k=1}^{45} k^2 - 37\sum_{k=1}^{45} k - \sum_{k=1}^{45} 60 - 6\sum_{k=1}^{25} k^2 + 37\sum_{k=1}^{25} k + \sum_{k=1}^{25} 60 \\
&= 188370 - 38295 - 2700 - 33150 + 12025 + 1500 \\
&= 127750
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 6.9 Sean $\sum_{k=1}^{5}(3x_k+2y_k)^2=161$, $\sum_{k=1}^{5}x_k^2=13$, $\sum_{k=1}^{5}(x_ky_k)=2$, entonces, el valor de $\sum_{k=1}^{5}y_k^2=?$:

A. 5 B. 6 C. 4 D. 8 E. 2

Solución

$$\sum_{k=1}^{5}(3x_k+2y_k)^2=161$$

$$9\sum_{k=1}^{5}x_k^2+12\sum_{k=1}^{5}(x_ky_k)+4\sum_{k=1}^{5}y_k^2=161, \qquad \sum_{k=1}^{5}x_k^2=13, \qquad \sum_{k=1}^{5}(x_ky_k)=2$$

$$9(13)+12(2)+4\sum_{k=1}^{5}{y_k}^2=161$$

$$117+24+4\sum_{k=1}^{5}{y_k}^2=161$$

$$141+4\sum_{k=1}^{5}{y_k}^2=161$$

$$4\sum_{k=1}^{5}{y_k}^2=20$$

$$\sum_{k=1}^{5}{y_k}^2=5$$

■

Ejercicio 6.10 Sea $\sum_{k=1}^{7}(x_k-5)^2=90$ y $\sum_{k=1}^{7}x_k^2=55$. Entonces, el valor de $\sum_{k=1}^{7}x_k$ es:

A. 10
B. 42
C. 21
D. 14
E. 16

Solución

$$\sum_{k=1}^{7}(x_k-5)^2=90$$
$$\sum_{k=1}^{7}(x_k^2-10x_k+25)=90$$
$$\sum_{k=1}^{7}x_k^2-10\sum_{k=1}^{7}x_k+\sum_{k=1}^{7}25=90$$
$$55-10\sum_{k=1}^{7}x_k+25\cdot 7=90$$
$$230-90=10\sum_{k=1}^{7}x_k$$
$$\sum_{k=1}^{7}x_k=\frac{140}{10}=14$$

Ejercicio 6.11 Sea $A\in\mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{i=1}^{A}\left(i^2-\frac{A}{3}-\frac{i}{3}\right)=1944$. El valor de $\sum_{k=-1}^{4}(Ak-3)$ es:

A. 144 B. 135 C. 136 D. 162 E. 221

Solución

$$\sum_{i=1}^{A}\left(i^2-\frac{A}{3}-\frac{i}{3}\right)=1944$$
$$\sum_{i=1}^{A}(i^2)-\sum_{i=1}^{A}\left(\frac{A}{3}\right)-\sum_{i=1}^{A}\left(\frac{i}{3}\right)=1944$$
$$\to\frac{A(A+1)(2A+1)}{6}-\frac{1}{3}A^2-\frac{1}{3}\frac{A(A+1)}{2}=1944$$
$$A(A+1)(2A+1)-2A^2-A(A+1)=11664$$
$$2A^3+3A^2+A-2A^2-A^2-A=11664$$
$$2A^3=11664$$
$$A^3=5832$$
$$A=18$$

$$\to\sum_{k=-1}^{4}(18k-3)=162-18=162-18=144$$

Ejercicio 6.12 Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{p} \left(\dfrac{2k-p}{8} \right) = 8$, entonces, $\left(2p^2 - 50p - 92\right)$ es:

A. 1289 B. 2900 C. 2250 D. 3700 E. 4900

Solución

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{2k-p}{8} \right) &= 8 \\ \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{2k}{8} \right) - \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{p}{8} \right) &= 8 \\ \frac{2}{8} \frac{p\,(p+1)}{2} - \frac{1}{8} p^2 &= 8 \\ p\,(p+1) - p^2 &= 64 \\ p^2 + p - p^2 &= 64 \\ \rightarrow p &= 64 \end{aligned}$$

$$\rightarrow 2(64)^2 - 50\,(64) - 92 = 4900$$

■

Ejercicio 6.13 Si $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(i^2 - \dfrac{n}{3} - \dfrac{i}{3} \right) = 72$, entonces, el valor de $\sum\limits_{k=-1}^{5} (nk+3)$ es:

A. 105 B. 125 C. 132 D. 124 E. 136

Solución

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - \frac{n}{3} - \frac{i}{3} \right) &= 72 \\ \sum_{i=1}^{n} (i^2) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{3} \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{3} \right) &= 72 \\ \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - \frac{1}{3} n^2 - \frac{1}{3} \frac{n\,(n+1)}{2} &= 72 \\ n\,(n+1)\,(2n+1) - 2n^2 - n\,(n+1) &= 432 \\ 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - n^2 - n &= 432 \\ n^3 &= 216 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Luego, $\sum\limits_{k=-1}^{5} (nk+3) = \sum\limits_{k=-1}^{5} (6k+3) = 84 + 21 = 105.$ ■

Problemas propuestos

Problema 6.1 Usando propiedades, calcule el valor de:

A. $\sum\limits_{k=1}^{50}(2k+1)^2 =$

B. $\sum\limits_{k=23}^{101}k(k-3) =$

Solución: A. 176850 B. 330062

Problema 6.2 Exprese mediante una sumatoria la expresión $\sum\limits_{k=2}^{14}(2k-2)+\sum\limits_{k=1}^{13}k^2+\sum\limits_{k=3}^{15}2.$

Solución: $\sum\limits_{k=1}^{13}\left(k^2+2k+2\right)$

Problema 6.3 Usando la propiedad telescópica, determine el valor de:

A. $\sum\limits_{k=1}^{100}\left(k^2-(k+1)^2\right)$

B. $\sum\limits_{k=5}^{55}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

Solución: A. -10200 B. $\dfrac{34}{333}$

Problema 6.4 Se sabe que $\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2 = 160, \quad \sum\limits_{i=1}^{8}x_i = 120, \quad x_9 = 6, \quad x_{10} = 8.$

Obtenga el valor de:

A. $\sum\limits_{i=1}^{9}x_i(x_i-2)$

B. $\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-1)^2-\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-1)^2$

Solución: A. -56 B. 74

Problema 6.5 Si $A\in\mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{A}\left(i^2-\dfrac{A}{3}-\dfrac{i}{3}\right) = 1944$. Determine el valor de $\sum\limits_{k=-1}^{4}(Ak-3)$.

Solución: $A = 18$, $\sum\limits_{k=-1}^{4}(Ak-3) = 144$

Problema 6.6 Determine el valor de la constante n si se sabe que:

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}(4i+3) = 39900$

B. $\sum\limits_{i=1}^{2n}(2i+3) = 320$

Solución: A. 140 B. 8

Problema 6.7 Si $\sum\limits_{k=0}^{10}(Ak-B) = 22$ y $\sum\limits_{k=3}^{12}\left(Ak-\dfrac{11}{10}B\right) = 62$, determine el valor de $A+B$.

Solución: 10

Problema 6.8 Determine el valor $a \in \mathbb{R}$ en $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{a}{k+1}-\frac{a}{k}\right)=\frac{40}{21}$

Solución: $a=-2$

Problema 6.9 Determine el valor de $\left(\left(\sum_{k=1}^{10} k\right)+5\right)^2$.

Solución: 3600

Problema 6.10 Exprese mediante una sumatoria $\sum_{k=2}^{5} k-\sum_{k=3}^{6} 2k+\sum_{k=4}^{7} 3k^2$

Solución: $\sum_{k=1}^{4}\left(3k^2+17k+24\right)$

Problema 6.11 Se sabe que $\sum_{i=1}^{8} {x_i}^2=160, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i=120, \quad x_9=6$. Obtener el valor de $\sum_{k=1}^{9} x_i\left(x_i-2\right)$.

Solución: -56

Problema 6.12 Halle la suma de la serie:

$$1+\frac{1^3+2^3}{1+2}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+2+3}+\ldots\frac{1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+15^3}{1+2+3+4+..+15}-\frac{1}{2}(1+2+3+4+\ldots.+15)$$

Solución: 620

7. Progresiones Aritméticas

Resumen

Definición

Definición 7.1 Progresión Aritmética P.A. Sean a y d dos números reales fijos.
Se llama una Progresión Aritmética (P.A.) de primer término a y diferencia d a la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ de números reales, definida por:

$$\begin{array}{lll} a_1 = & a, & \text{si } n=1 \\ a_n = & a_{n-1}+d, & \text{si } n \geq 2 \end{array} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Término General

El término enésimo o término general a_n de una P.A. es: $a_n = a + (n-1)\cdot d$

Suma de n Términos

Suma de n términos de una P.A. es: $S_n = \dfrac{n}{2}\left(2a + (n-1)\cdot d\right)$

- **Tres términos en progresión aritmética**
  Si tenemos que considerar tres términos en P.A. cuya suma es conocida, es conveniente tomarlos como:
  $$(a-d), \quad a, \quad (a+d)$$
  En general, si tenemos que considerar $(2k+1)$ términos en P.A. se puede usar el siguiente esquema:
  $$(a-kd), \quad a-(k-1)d, \ldots, \quad (a-d), \quad a, \quad (a+d), \ldots, \quad (a+kd)$$
  .
- **Cuatro términos en P.A.** Si se deben considerar cuatro términos en P.A. cuya suma es conocida, es conveniente tomarlos como:
  $$a-3d, \quad a-d, \quad a+d, \quad a+3d$$
  .

Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.1 Sea $a_1, a_2, a_3, ..a_{n-1}, a_n$ una P.A. Si $a_1 + a_4 + a_7 + ... + a_{16} = 114$, entonces, $(a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16})$ es igual a:

A. 64 B. 76 C. 98 D. 38 E. 34

Solución
Sea

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 + a_7 + ... + a_{16} &= 114 \\ a + (a+3d) + (a+6d) + (a+9d) + (a+12d) + (a+15d) &= 114 \\ 6a + 45d &= 114 \\ 2a + 15d &= 38 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} &= a + a + 5d + a + 10d + a + 15d \\ &= 4a + 30d \\ &= 2(2a + 15d) \\ &= 2 \cdot (38) = 76 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 7.2 En una P.A. se tiene que $a_{19} = 0$, entonces, $\frac{a_{49}}{a_{29}}$ es igual a:

A. 1:3 B. 4:1 C. 2:1 D. 3:1 E. 3:2

Solución
Sea $a_{19} = a + 18d = 0 \rightarrow a = -18d$

$$\frac{a_{49}}{a_{29}} = \frac{a + 48d}{a + 28d} = \frac{-18d + 48d}{-18d + 28d} = \frac{30d}{10d} = \frac{3}{1} \rightarrow \frac{a_{49}}{a_{29}} = \frac{3}{1}$$

■

Ejercicio 7.3 Sea $a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1}, a_n$ una P.A. Si $a_1 + a_7 + a_{16} = 40$, entonces, la suma de los 15 primeros términos de la P.A. es:

A. 200
B. 120
C. 280
D. 150
E. 220

Solución
Sea

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_7 + a_{16} &= 40 \\
a + (a+6d) + (a+15d) &= 40 \\
\rightarrow 3a + 21d &= 40 \\
\rightarrow a + 7d &= \frac{40}{3} \\
\rightarrow S_{15} &= \sum_{k=0}^{15} (a_k) = \frac{15}{2}(2a+14d) = 15(a+7d) = 15 \cdot \frac{40}{3} = 200
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 7.4 Sea S_n la suma de los primeros n términos de una P.A. Si $S_4 = 16$ y $S_6 = -48$, entonces, $S_{10} =$?

A. -260 B. -320 C. -410 D. -380 E. -160

Solución
Sean $S_4 = 16$ y, $S_6 = -48$ tal que

$$S_4 = 16 \rightarrow \frac{4}{2}(2a+3d) = 16 \rightarrow 2a+3d = 8 \quad (1)$$

$$S_6 = -48 \rightarrow \frac{6}{2}(2a+5d) = -48 \rightarrow 2a+5d = -16 \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) en forma simultánea se obtiene que *a=22* y *d=-12*, luego:

$$S_{10} = 5(44 + 9(-12)) = 5(44-108) = -320$$

■

Ejercicio 7.5 Si la suma y el producto de los primeros tres términos en una P.A. es 33 y 1155 respectivamente, entonces, un valor para su término a_{11} puede ser:

A. 25 B. -36 C. -25 D. -35 E. -20

Solución
Sean $(a-d)$, a, $(a+d)$ tres términos de una P.A., tal que

$$
\begin{aligned}
(a-d) + a + (a+d) = 33 \rightarrow 3a = 33 \rightarrow a = 11 \\
(11-d) \cdot 11 \cdot (11+d) = 1155 \\
121 - d^2 = 105 \rightarrow d^2 = 16 \rightarrow d = \pm 4
\end{aligned}
$$

Si $a = 11$ y $d = 4$, entonces: $a_{11} = 7 + 10(4) = 51$
Si $a = 11$ y $d = -4$, entonces: $a_{11} = 15 + 10(-4) = -25$ ■

Ejercicio 7.6 En una P.A, $a_1 = 2$ y la suma de los primeros cinco términos es un cuarto de la suma de los cinco términos siguientes. Entonces, el término a_{20} es:

A. 112 B. -112 C. 114 D. -114 E. 110

Solución
Sea $a_1 = 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} a_k &= \frac{1}{4}\sum_{k=6}^{10} a_k \\
\to a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= \frac{1}{4}(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) \\
\to \sum_{k=0}^{4}(a+kd) &= \frac{1}{4}\sum_{k=5}^{9}(a+kd) \\
\to 5a + 10d &= \frac{1}{4}(5a+35d) \\
\to 20a + 40d &= 5a + 35d \\
\to 15a + 5d &= 0 \to d = -3a
\end{aligned}$$

Si a=2, entonces, d=-6, luego:

$$a_{20} = a + 19d = 2 + 19(-6) = -112$$

■

Ejercicio 7.7 Sean A, B, C conjuntos tales que

$$n(A\cup B) = 23, \quad n(B-A) = 12, \quad n(C-A) = 10, \quad n(B\cap C) = 6, n(A\cap B\cap C) = 4.$$

Entonces, $n(A)$, $n(A\cup C)$, $n(A\cup B\cup C)$, en ese orden:

A. Forman una P.A. cuya diferencia es 6.

B. Forman una P.A. cuyo primer término es 11 y la diferencia es 8.

C. Forman una P.A. cuya diferencia es 2.

D. Formar una P.A. cuyo último término es 31 y diferencia es 10.

Solución

$$\begin{aligned}
&n(A\cup B) = n(A) + n(B-A) = 23 \\
&n(A) = 23 - n(B-A) = 23 - 12 = 11 \to n(A) = 11 \\
&n(A\cup C) = n(A) + n(C-A) = 11 + 10 = 21 \\
&n(A\cup B\cup C) = n(A\cup B) + n(C-A) - n((C\cap B)-A) = 23 + 10 - 2 = 31
\end{aligned}$$

Por lo tanto, 11, 21 y 31 forman una P.A. cuyo último término es 31 y diferencia 10. ■

Ejercicio 7.8 La suma de tres números en P.A. es -3 y su producto es 8, entonces, la suma de los cuadrados de los números es:

A. 9 B. 10 C. 16 D. 21 E. 14

Solución
Sean $(a-d)$, a y $(a+d)$ los números de una P.A., entonces:

$$(a-d)+a+(a-d)=-3 \rightarrow 3a=-3 \rightarrow a=-1$$

Luego los números son de la forma *(-1-d), -1, (-1+d)* y su producto es 8.

$$\begin{aligned}(-1-d)(-1)(-1+d) &= 8\\ -1+d^2 &= 8\\ \rightarrow d^2 &= 9\\ \rightarrow d &= 3, \quad d=-3\end{aligned}$$

Si $a=-1$ y $d=3$, los números son -4, -1, 2. $\therefore (-4)^2+(-1)^2+(2)^2=21$.
Si $a=-1$ y $d=-3$, los números son 2, -1, -4. $\therefore (-4)^2+(-1)^2+(2)^2=21$.

Ejercicio 7.9 Sean los primeros 100 términos de una P.A. $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$. Sabiendo que $a_{26}+a_{75}=300$, el resultado de la suma de sus primeros 100 términos es:

A. 15000 B. 7650 C. 15300 D. 30300 E. 30 000

Solución
Sea

$$\begin{aligned}&\rightarrow a_{26}+a_{75}=300\\ \rightarrow (a+25d)+(a+74d) &= 300\\ &\rightarrow 2a+99d=300\\ &\rightarrow \sum_{k=1}^{100} a_k = \frac{100}{2}(2a+99d)=50\cdot 300=15000\end{aligned}$$

Ejercicio 7.10 Si la suma de un cierto número n de términos de la P.A. 25, 22, 19... es 116, entonces, el último término es:

A. 4 B. 3 C. 2 D. -4 E. 5

Solución

Sea S_n tal que

$$\begin{aligned}\rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left(2\cdot 25+(n-1)(-3)\right) &= 116\\ n(53-3n) &= 232\\ 3n^2-53n+232 &= 0\\ n &= \frac{58}{6}\notin N, n=8\end{aligned}$$

Luego, el último término es:

$$t_8 = a+7d = 25+7(-3) = 4$$

Ejercicio 7.11 Si el décimo término de una progresión aritmética es $\frac{1}{20}$ y su vigésimo término es $\frac{1}{10}$, entonces, la suma de los primeros 200 términos es:

A. $50\frac{1}{4}$ B. 100 C. 50 D. $100\frac{1}{2}$ E. 150

Solución
Sea

$$a_{10} = \frac{1}{20} \rightarrow a+9d = \frac{1}{20}, ...(1)$$
$$a_{20} = \frac{1}{10} \rightarrow a+19d = \frac{1}{10} ...(2)$$

Resolviendo (1) y (2): $d=\frac{1}{200}$, $a=\frac{1}{200}$

$$S_{200} = \frac{200}{2}\left(2\cdot\frac{1}{200}+199\cdot\frac{1}{200}\right) = \frac{1}{2}(2+199) = \frac{201}{2} = 100\tfrac{1}{2}$$

Problemas Propuestos

Problema 7.1 En una P.A. el término de lugar 24 es 100. Determine la suma de los primeros 47 términos.
Solución: 4700

Problema 7.2 Los términos $(-2x)$, (x^2-3), $(3x^2-14)$ forman una P.A. Hallar valores posibles de x.
Solución: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

Problema 7.3 Sean $\{a_1, a_2, a_3, ...a_n\}$ términos de una P.A. Si $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} = 72$, encuentre la suma de los primeros 17 términos de la P.A.
Solución: 306

Problema 7.4 El cometa Halley orbita alrededor del Sol. Él puede ser visto desde la Tierra a simple vista cuando parte de su órbita se encuentra más cerca del Sol. Eso ocurre, en promedio, cada 76 años. Sabiendo que después del descubrimiento, la tercera vez que fue visto desde la Tierra a simple vista sucedió en el año 1683 y la séptima vez fue en 1986, entonces:

A. ¿Cuándo fue la quinta vez, después del descubrimiento, que era visible desde la Tierra a simple vista?

B. ¿Cuáles fueron (o serán) todos los años en que el cometa ha sido (o será) visto a simple vista desde la Tierra desde 1500 al año 2200?

Solución: A. 1835 B. 1531, 1607, 1683, 1759, 1835, 1910, 1986, 2062, 2138

Problema 7.5 Una persona tenía que pagar una deuda de 6.000 UF en 40 pagos mensuales, los que forman una P.A. Cuando ya había pagado 30 de las cuotas, fallece dejando una tercera parte de la deuda sin pagar. Determine el valor de la primera cuota.
Solución: La primera cuota es 85 UF.

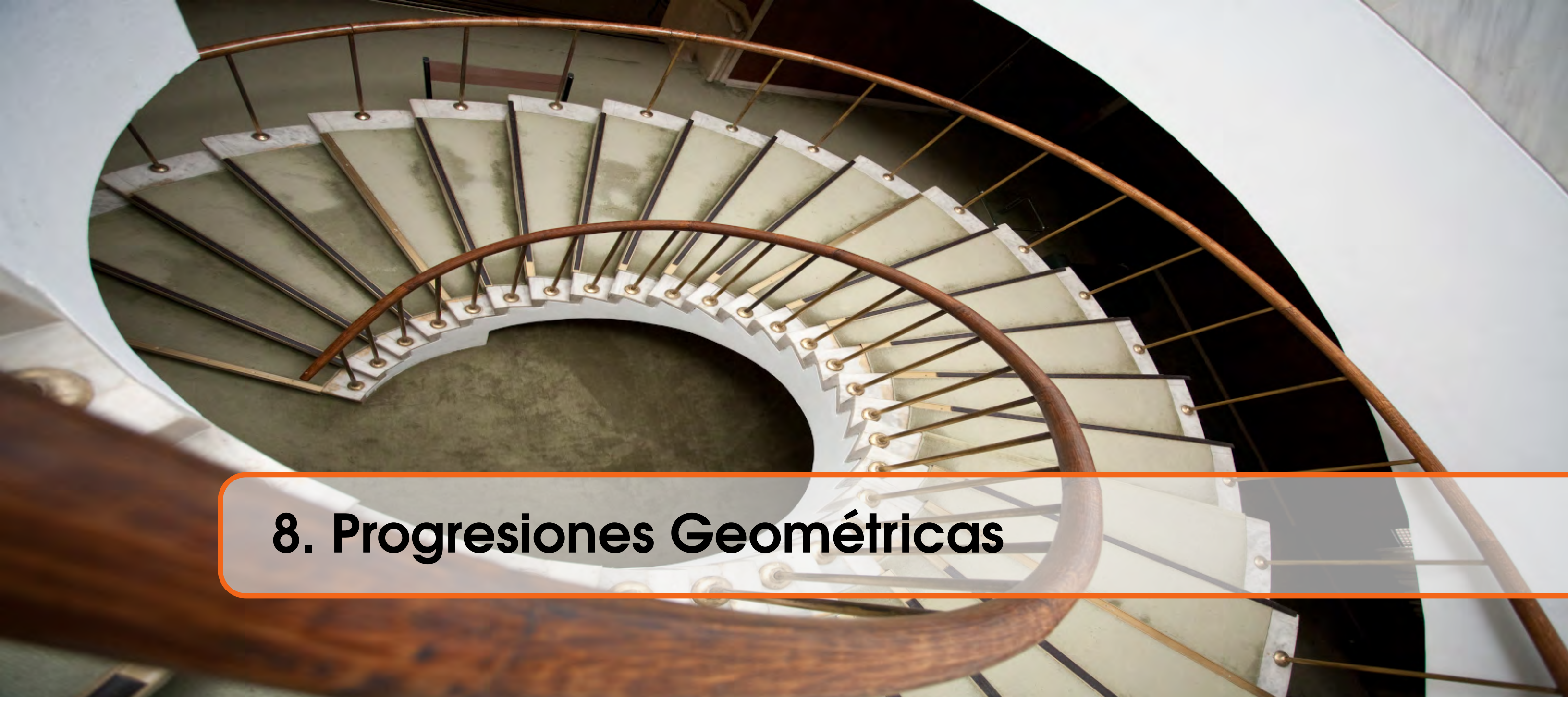
Problema 7.6 La suma de los n primeros términos de la P.A. $2,\ 5,\ 8...$ es 950. Encuentre el término de lugar 50, y el número de términos.
Solución: $t_{50} = 149, n = 25$.

Problema 7.7 La suma del primer y tercer término de una P.A. es 12 y el producto del primer y segundo término es 24. Determine el primer término y la diferencia constante.
Solución: $a_1 = 4, d = 2$.

Problema 7.8 La suma de cuatro términos consecutivos de una P.A. es 28 y la suma de sus cuadrados es 276. ¿Cuáles son los números?
Solución: $1,\ 5,\ 9,\ 13$.

Problema 7.9 A un empleado le ofrecen un trabajo con salario de $3.000.000 anuales y le prometen aumentos anuales de $ 230.000. Calcule sus ingresos totales a los 10 años de trabajar en ese empleo.
Solución: $ 40.350.000

Problema 7.10 Una compañía distribuirá $4.600.000 en bonos a sus diez mejores vendedores. El último premiado de la lista recibirá $100.000 y la diferencia en dinero entre los vendedores sucesivamente clasificados debe ser constante. Determine el bono para cada vendedor.
Solución: La diferencia entre dos vendedores sucesivamente clasificados es $d = -80.000$ y el mejor vendedor recibe un bono de $820.000, el siguiente $740.000 y así sucesivamenente.



8. Progresiones Geométricas

Resumen

Definición P.G.

Definición 8.1 Progresión Geométrica. Sean a y r dos números reales fijos.
Se llama progresión geométrica (P.G.) de primer término a y razón r a la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ de números reales, definida por:

$$\begin{array}{lll} a_n = & a, & \text{si } n = 1 \\ a_n = & r \cdot a_{n-1}, & \text{si } n \geq 2 \end{array} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{donde } r \text{ es la razón: } a \neq 0,\ r \neq 0.$$

Término general

Término $n-$ésimo o término general a_n de la progresión geométrica:

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

Suma de n términos de una progresión geométrica

Suma de n términos de la progresión geométrica:

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r},\ \ r \neq 1$$

Observación.
Si tenemos que considerar tres términos en P.G. es conveniente tomarlos como:

$$\frac{a}{r},\quad a,\quad ar$$

y en el caso de cuatro cuatro términos como:

$$\frac{a}{r^3},\quad \frac{a}{r},\quad ar,\quad ar^3$$

.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 8.1 Si a_2, a_5 y a_9 son términos de una P.A. y están en P.G. entonces, la razón es:

A. 8/5 B. 4/3 C. 1 D. 7/4 E. 3

Solución
Si a_2, a_5 y a_9 están en P.A., entonces, $a_2 = a + d$, $a_5 = a + 4d$ y $a_9 = a + 8d$.
Además estos términos forman una P.G.:

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_9}{a_5} \\
&\rightarrow (a_5)^2 = a_9 \cdot a_2 \\
&\rightarrow (a + 4d)^2 = (a + 8d)(a + d) \\
&\rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 9ad + 8d^2 \\
&\rightarrow 8d^2 = ad \rightarrow 8d^2 - ad = 0 \\
&\rightarrow d(8d - a) = 0 \rightarrow a = 8d
\end{aligned}$$

Luego:

$$r = \frac{a_5}{a_2} = \frac{8d + 4d}{8d + d} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

■

Ejercicio 8.2 La suma del tercero y el cuarto término de una P.G. es 60 y el producto de sus primeros tres términos es 1000. Si el primer término de la P.G. es positivo, entonces, el séptimo término es:

A. 7290 B. 320 C. 640 D. 2430 E. 1250

Solución
Sean $\frac{a}{r}, a, ar$ los primeros términos de la P.G. tal que:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{r}\right) \cdot a \cdot (ar) = 1000 \\
&\rightarrow a^3 = 1000 \rightarrow a = 10 \\
&a_3 + a_4 = 60 \\
&\rightarrow ar + ar^2 = 60 \\
&\rightarrow ar(1 + r) = 60
\end{aligned}$$

Si *a=10*, entonces,

$$10r\,(1+r)=60 \rightarrow r(r+1)=6 \rightarrow r=2, r=-3.$$

Se requiere que $\frac{a}{r}>0$, si $a=10$ y $r=2$, entonces, $a_7=10(2)^6=640$. ■

Ejercicio 8.3 El producto de tres términos consecutivos de una P.G. es 512. Si agregamos 4 al primero y al segundo de estos términos, los tres términos forman una P.A. Entonces, la suma de los términos originales de la P.G. es:

A. 36 B. 32 C. 28 D. 24 E. 22

Solución
Sean $\frac{a}{r}, a, ar$ los primeros términos de la P.G. tal que

$$\left(\frac{a}{r}\right)\cdot a\cdot(ar)=512 \rightarrow a^3=512 \rightarrow a=8.$$

Entonces, $(\frac{8}{r}+4)$, 12, $(8r)$ están en progresión aritmética, luego:

$$\begin{aligned}
12 &= \frac{\frac{8+4r}{r}+8r}{2}\\
\rightarrow 24 &= \frac{8+4r+8r^2}{r}\\
\rightarrow 24r &= 8+4r+8r^2\\
\rightarrow 8r^2-20r+8&=0\\
\rightarrow 2r^2-5r+2&=0\\
\rightarrow r &= \frac{1}{2}, r=2
\end{aligned}$$

Los términos originales son 4, 8, 16, y la suma es 28. ■

Ejercicio 8.4 Sea a_n el enésimo término de una P. G. de términos positivos.
Si $\sum_{n=1}^{100} a_{2n+1}=200$ y $\sum_{n=1}^{100} a_{2n}=100$, entonces, $\sum_{n=1}^{200} a_n$ es igual a:

A. 300

B. 175

C. 225

D. 150

E. 250

Solución
Sea

$$\sum_{n=1}^{100} a_{2n+1} = 200$$
$$\rightarrow a_3 + a_5 + a_7 + ... + a_{201} = 200$$
$$\rightarrow ar^2 + ar^4 + ar^6 + ... + ar^{200} = 200$$
$$\rightarrow ar^2\left(1 + r^2 + r^4 + r^6 ... + r^{198}\right) = 200 \rightarrow ar^2\left(\frac{1 - r^{200}}{1 - r^2}\right) = 200 \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{100} a_{2n} = 100 \rightarrow a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{200} = 100$$
$$\rightarrow ar + ar^3 + ar^5 + ... + ar^{199} = 100$$
$$\rightarrow ar\left(1 + r^2 + r^4 + ... + r^{198}\right) = 100 \rightarrow ar\left(\frac{1 - r^{200}}{1 - r^2}\right) = 100 \quad (2)$$

Dividiendo lado a lado (1) con (2):

$$\rightarrow \frac{ar^2}{ar} = \frac{200}{100} \rightarrow r = 2$$
$$\sum_{n=1}^{200} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_{200}$$
$$\sum_{n=1}^{200} a_n = a + ar + ... + ar^{199}$$
$$\sum_{n=1}^{200} a_n = a(1 + r + ... + r^{199})$$
$$\sum_{n=1}^{200} a_n = a\left(\frac{1 - r^{200}}{1 - r}\right) \quad (3)$$

En (2), factorizando se obtiene (3):

$$\rightarrow (ar)(\frac{1}{1 + r})\left(\frac{1 - r^{200}}{1 - r}\right) = 100$$
$$\rightarrow a\left(\frac{1 - r^{200}}{1 - r}\right) = \frac{100\,(1 + r)}{r}$$
$$\sum_{n=1}^{200} a_n = \frac{100 \cdot 3}{2} = 150$$

■

Ejercicio 8.5 Sean a_1, a_2, a_3, a_4 términos de una P.G. tal que $a_1 + a_2 = 12$ y $a_3 + a_4 = 48$. Si los términos son alternativamente positivos y negativos, entonces, el primer término es:

A. 4 B. -4 C. -12 D. 12 E. -8

Solución
Sean a_1, a_2, a_3, a_4 términos de una P.G. tal que $a_1 + a_2 = 12$ y $a_3 + a_4 = 48$. Entonces:

$$\begin{aligned} a + ar &= 12 \\ \to a(1+r) &= 12 && (1) \\ ar^2 + ar^3 &= 48 \\ \to ar^2(1+r) &= 48 && (2) \end{aligned}$$

Dividiendo lado a lado (1) y (2):

$$\frac{a(1+r)}{ar^2(1+r)} = \frac{12}{48} \to \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} \to r^2 = 4 \to r = 2, r = -2$$

Si $r = 2$, en (1): $a = 4$, luego: 4, 8, 16, 32 no es P.G. de términos positivos y negativos.
Si $r = -2$, en (1): $a = -12$, luego: -12, 24, -48, 96 es una P.G. de términos positivos y negativos. ■

Ejercicio 8.6 La suma del tercer y cuarto término de una P.G. es 60 y el producto de los tres primeros términos es 1000. Si el primer término de esta P.G. es positivo, entonces, el séptimo término es:

A. 7290 B. 320 C. 640 D. 241 E. 8030

Solución
Sea $a > 0$ tal que

$$\begin{aligned} ar^2 + ar^3 &= 60 \\ \to ar^2(1+r) &= 60 && (1) \\ a \cdot ar \cdot ar^2 &= 1000 \\ \to a^3r^3 &= 1000 \to ar = 10 && (2) \end{aligned}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$10r \cdot (1+r) = 60 \to r(1+r) = 6 \to r = 2 \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$ar = 10 \to 2a = 10 \to a = 5$$
$$T_7 = a \cdot r^6 \to T_7 = 5 \cdot 2^6 = 320$$

■

Ejercicio 8.7 La suma de tres términos consecutivos de una P.G. es 52 y su producto es 1728. Halle el número menor.

A. 4 B. 12 C. 2 D. 10 E. 6

Solución
Sean $\left(\frac{a}{r}\right)$, a, $a\dot{r}$ los términos de la progresión geométrica, tal que

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right) \cdot (a) \cdot (ar) &= 1728\\ \to a^3 &= 1728 \to a = 12.\end{aligned}$$

La suma de los términos es:

$$\begin{aligned}\frac{12}{r} + 12 + 12r &= 52\\ \frac{12}{r} + 12r &= 40\\ 12 + 12r^2 &= 40r\\ 3 + 3r^2 &= 10r\\ 3r^2 - 10r + 3 &= 0\\ r &= \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}\\ \to r &= 3, r = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Si $a = 12, r = 3$, entonces: 4, 12, 36.
Si $a = 12, r = \frac{1}{3}$, entonces: 36, 12, 4. ■

Ejercicio 8.8 El primer término de una P.G. es 7, el último término es 448 y la suma de todos los términos es 889, entonces, la razón común es:

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. 6

Solución
Sean $a_1 = 7$, $a_n = 448$, tal que

$$a_n = ar^{n-1} = 448 \to a_n = 7r^{n-1} = 448 \to r^{n-1} = 64 \to r^n = 64r.$$

Además:

$$
\begin{aligned}
S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} &= 889 \\
\frac{7\cdot(1-64r)}{1-r} &= 889 \\
\frac{(1-64r)}{1-r} &= 127 \\
(1-64r) &= 127(1-r) \\
127r - 64r &= 127 - 1 \\
53r &= 126 \\
\rightarrow r &= 2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 8.9 En una P.G. el tércer término es 3 y el séptimo es $3/16$. Entonces, el noveno término es:

A. $a_9 = \frac{3}{64}$ B. $a_9 = \frac{1}{128}$ C. $a_9 = \frac{1}{64}$ D. $a_9 = \frac{3}{256}$ E. $a_9 = \frac{3}{128}$

Solución
Sean

$$
\begin{aligned}
a_3 &= ar^2 = 3 && (1) \\
a_7 &= ar^6 = \frac{3}{16} && (2)
\end{aligned}
$$

Dividiendo lado a lado (1) con (2):

$$
\rightarrow \frac{ar^2}{ar^6} = \frac{3}{\frac{3}{16}} \rightarrow \frac{1}{r^4} = 16 \rightarrow r = \pm\frac{1}{2}
$$

Reemplazando en (1) el valor de r:

$$
a_3 = a\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \rightarrow a\cdot\frac{1}{4} = 3 \rightarrow a = 12
$$

Luego:

$$
a_9 = 12\cdot\left(\pm\frac{1}{2}\right)^8 = 12\cdot\frac{1}{256} = \frac{3}{64}
$$

Ejercicio 8.10 Dos conjuntos A y B son tales que $n\,(A-B)=50$, $n\,(A\cup B)=62$ y, además, $n\,(A-B)$, $n\,(A\cap B)$ y $n\,(B-A)$ están en P.G. Entonces, el número de elementos del conjunto $A\cap B$ es:

A. 3 B. 23 C. 12 D. 45 E. 10

Solución

$$\begin{aligned} n\,(A-B) = n(A) - n\,(A\cap B) &= 50 \\ \rightarrow n\,(A\cap B) &= n(A) - 50 \qquad (1) \\ n\,(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) &= 62 \qquad (2) \end{aligned}$$

Reemplazando (1) en (2), se obtiene:

$$\begin{aligned} n(B) &= 12 \\ \therefore n\,(B-A) = n(B) - n(A\cap B) &= 12 - n(A\cap B) \qquad (3) \end{aligned}$$

Reemplazando (1) en (3):

$$n(B-A) = 12 - (n(A) - 50) = 62 - n(A)$$

Si $n\,(A-B)$, $n\,(A\cap B)$ y $n\,(B-A)$ están en P.G., entonces, la razón es:

$$\begin{aligned} r = \frac{n\,(A\cap B)}{n(A-B)} &= \frac{n\,(B-A)}{n(A\cap B)} \\ \rightarrow \frac{n(A)-50}{50} &= \frac{62-n(A)}{n(A)-50} \\ \rightarrow [n(A)-50]^2 &= 50\,[62-n(A)] \\ \rightarrow n^2(A) - 100n(A) + 2500 &= 3100 - 50n(A) \\ \rightarrow n^2(A) - 50n(A) - 600 &= 0 \\ \rightarrow (n(A)-60)\,(n(A)+10) &= 0 \\ \rightarrow n(A) = 60, \quad n(A) &= -10 \qquad (4) \end{aligned}$$

Reemplazando (4) en (1):

$$\rightarrow n\,(A\cap B) = 60 - 50 = 10$$

■

Ejercicio 8.11 Un jugador en el casino de juegos apuesta en el primer juego $ 5000 y, como perdió, duplicó la apuesta en el segundo juego con el mismo mal resultado. Continuó duplicando la apuesta hasta que en el octavo juego apostó todo el dinero que le quedaba. ¿Cuánto apostó en el último juego, y cuánto perdió en total?

A. $ 640000 y $ 1275000
B. $ 480000 y $ 1425000
C. $ 320000 y $ 1475000
D. $ 540000 y $ 980000

Solución
Sea $r = 2$

$$f(1) = 5000$$
$$f(8) = 5000 \cdot 2^7 = 640{,}000$$
$$S(8) = 5000 \cdot \frac{(1-2^8)}{1-2}$$
$$S(8) = -5000 \cdot (1-2^8)$$
$$S(8) = 1275000$$

■

Ejercicio 8.12 Un estudiante va a jugar a la pelota en una cancha y no encuentra a nadie. Lanza la pelota hacia arriba, llegando a 8 metros de altura. La pelota cae, rebota y vuelve a subir alcanzando ahora 4 metros de altura. Así, cada vez que rebota, logra la mitad de la altura de la vez anterior. ¿Qué altura alcanzó después del quinto bote?

A. 0.25 m
B. 75 cm
C. 0.5 m
D. 32 cm
E. 1.2 m

Solución
Sea $r = \frac{1}{2}$

$$f(1) = 4m$$
$$\ldots$$
$$f(4) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} = 0.5m$$
$$f(5) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = 0.25m$$

Después del quinto rebote la altura que alcanza es 0.25 metros. ■

Problemas Propuestos

Problema 8.1 El cuarto, el séptimo y el último término de una P.G. es 10, 80 y 2560 respectivamente. Encuentre la razón, el primer término y el número de términos en la P.G.
Solución: $r = 2, \quad t_1 = 5/8, \quad n = 12$

Problema 8.2 El primer término de una P.G. es 7, el último término es 448 y la suma de todos los términos es 889. Determine la razón común y el noveno término.
Solución: $r = 2, \quad t_9 = 1792$.

Problema 8.3 Tres números están en P.G. de modo que su suma es 38 y su producto es 1728. Encuentre la razón y el mayor de estos números.
Solución: $r = 3/2, \quad r = 2/3, \quad mayor : 9$.

Problema 8.4 A la entrada de un evento público se repartía un folleto con información sobre algunas precauciones de higiene para dificultar el crecimiento bacteriano. Entre otras informaciones, se escribió: "Las bacterias se reproducen, predominantemente, por un proceso en el que una bacteria duplica su material genético y se divide en dos bacterias idénticas. Considera que, en este instante, una bacteria se ha dividido en dos y que, de ahora en adelante, cada bacteria existente se divide en otras dos bacterias cada 20 minutos. Es decir, en 40 minutos tendremos ocho bacterias". De acuerdo con esta información determine el número de bacterias, después de 5 horas, desde el momento inicial.
Solución: 65536

Problema 8.5 La suma de una P.G. de n términos cuya razón común vale 3, es 364 y el último término de la progresión es 243. Determine el primer término y el número de términos.
Solución: $t_1 = 1, n = 6$.

Problema 8.6 La suma de tres números en P. A. es 39. Si los extremos se disminuyen en 3 y el del medio en 7, los números quedan en P.G. Determine los números de la P.A. y de la P.G.
Solución: P.A.={5, 13, 21} P.G.={2, 6, 18}

Problema 8.7 Se deja caer una pelota desde una cierta altura y tras cada rebote la altura alcanzada se reduce a la mitad con respecto a la altura anterior. Si al cuarto rebote alcanza una altura de 30 centímetros: ¿desde qué altura se deja caer la pelota?
Solución: 480 cm

Problema 8.8 En una P.G. si la razón entre la suma de los primeros 5 términos y la suma de sus recíprocos es 49, y $a_1 + a_3 = 35$, determine el primer término.
Solución: 28

Problema 8.9 Sea a_n una P.G. tal que $\dfrac{a_4}{a_6} = \dfrac{1}{4}$ y $a_2 + a_5 = 216$. Determine el valor de a_1.
Solución: 12 o $108/7$

Problema 8.10 Una empresa produjo 12000 unidades de cierto producto en 2017. Cada año siguiente producirá 20 % más de este producto respecto al año anterior. ¿Cuántas unidades de este producto la empresa producirá durante el período de 2018 a 2023?
Solución: 119159

9. Teorema del Binomio

Resumen

Factorial de un número

Definición 9.1 Factorial de un número

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-2) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$0! = 1$$
$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Número combinatorio

Definición 9.2 Número combinatorio $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}, \qquad n, r \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq r \leq n$

Teorema 9.1 Sean $n, r \in \mathbb{N}, n > r$, entonces:

$$\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$$

Teorema del Binomio

Teorema 9.2 Teorema del Binomio. Si $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos y $n \in \mathbb{N}_0$, entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- El término de lugar $(k+1)$ en la expansión de $(a+b)^n$ está dado por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- El número de términos en la expansión de $(x+a)^n$ es $(n+1)$.

- El k-ésimo término desde el final es $((n+1)-(k-1))$ que corresponde al término de lugar $(n+2-k)$ contado desde el principio.

- Si la expansión es $(a-b)^n$, el término general es:

$$T_{r+1} = (-1)^r \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Término central

- Si n es par, el término de lugar $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ es el término medio.
- Si n es impar, los términos medios son aquellos de lugares: $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ y $\left(\frac{n+3}{2}\right)$.

Término independiente de x

- Para obtener el término independiente de x , hacemos $r = k$ en el término general de $(x+a)^n$, por lo que obtenemos $\binom{n}{r} a^n$ que es un término que prescinde de x.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 9.1 El término de lugar 13 en el desarrrollo de $\left(x^2+\dfrac{1}{x^5}\right)^{15}$ es:

A. $252x^{61}$ B. $\dfrac{455}{x^{54}}$ C. $\dfrac{125}{x^8}$ D. $30x^6$ E. $\dfrac{445}{x^{54}}$

Solución

El término de lugar $(k+1)$ en la expansión de $(a+b)^n$ está dado por $T_{k+1}=\dbinom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Luego:

$$T_{13}=\binom{15}{12}\cdot\left(x^2\right)^{15-12}\cdot\left(\frac{1}{x^5}\right)^{12}=\binom{15}{3}\cdot\left(x^2\right)^3\cdot\left(x^{-5}\right)^{12}=\binom{15}{3}\cdot\left(x^6\right)\cdot\left(x^{-60}\right)$$

$$T_{13}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot x^{-54}=\frac{455}{x^{54}}$$

■

Ejercicio 9.2 Encuentre el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$

A. 80 B. 210 C. 120 D. 240 E. -150

Solución

Sea

$$T_{k+1}=\binom{10}{h}\left(x^2\right)^{10-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\binom{10}{k}\left(x^{20-2k}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\binom{10}{k}x^{20-3k}\quad(1)$$

Para encontrar el coeficiente de x^8, $20-3k$ debe ser 8, es decir, $20-3k=8\to k=4$.
Reemplazando en (1), el coeficiente requerido es:

$$(-1)^4\binom{10}{4}=\frac{10\,(9)\,(8)\,(7)}{(1)\,(2)\,(3)\,(4)}=210$$

■

Ejercicio 9.3 Sea $\left(\dfrac{x\sqrt{y}}{3}-\dfrac{3}{y\sqrt{x}}\right)^{12}$. El término que se encuentra en la posición central es:

A. $\dfrac{792x^3}{y^3}$ B. $\dfrac{924y^3}{x^3}$ C. $\dfrac{792y^3}{x^3}$ D. $\dfrac{924x^3}{y^3}$

Solución

Si $n=12$, existe un único término central, a saber: $T_{\left(\frac{12}{2}+1\right)}=T_7$

$$\to T_7 = \binom{16}{6}\left(\frac{x\sqrt{y}}{3}\right)^6\left(\frac{-3}{y\sqrt{x}}\right)^6$$

$$T_7 = \binom{12}{6}\frac{x^6y^3}{3^6}\cdot\frac{(-3)^6}{y^6x^3}$$

$$T_7 = \binom{12}{6}\frac{x^3}{y^3}$$

$$\to T_7 = 924\frac{x^3}{y^3}$$

■

Ejercicio 9.4 Encuentre el valor del término independiente de x en la expansión de $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$

A. 7 B. $\frac{7}{18}$ C. $-\frac{5}{18}$ D. -12 E. 6

Solución
Sea

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{9-k}\left(-\frac{1}{3x}\right)^k = (-1)^k\binom{9}{k}\left(\frac{3}{2}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k x^{18-3k}$$

Si este término es independiente de x, entonces, el exponente debe ser cero, es decir:

$$18 - 2r = 0 \to r = 6$$

Por lo tanto, el séptimo término es independiente de x y su valor para $r = 6$ es:

$$T_7 = T_{6+1} == (-1)^6\binom{9}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^6 = 84\cdot\frac{1}{2^3\cdot 3^3} = \frac{84}{108} = \frac{7}{18}$$

■

Ejercicio 9.5 Si $T_{17} = T_{18}$ en la expansión de $(2+a)^{50}$, entonces, el valor de a es igual a:

A. 2 B. 5 C. 3 D. 1 E. 7

Solución
El término de lugar $(k+1)$ está dado por $T_{k+1} = \binom{50}{k}2^{50-k}b^k$, luego:

$$\rightarrow T_{17} = T_{16+1} = \binom{50}{16} 2^{50-16} a^{16} = \binom{50}{16} 2^{34} a^{16},$$

$$\rightarrow T_{18} = T_{17+1} = \binom{50}{17} 2^{50-17} a^{17} = \binom{50}{17} 2^{33} a^{17}$$

$$\text{Si} \quad T_{17} = T_{18} \rightarrow \binom{50}{17} \cdot 2^{33} a^{17} = \binom{50}{16} \cdot 2^{34} a^{16}$$

$$\frac{\binom{50}{17} \cdot 2^{33}}{\binom{50}{16} \cdot 2^{34}} = \frac{a^{16}}{a^{17}}$$

$$\frac{(50-17+1)}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$$

$$(2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \rightarrow a = 1$$

■

Ejercicio 9.6 $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = ?$

A. 2^n B. n C. 1 D. 3^n E. n^2

Solución

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k} (2)^k$$
$$= (1+2)^n = 3^n$$

■

Ejercicio 9.7 Si la razón entre el quinto término comenzando desde el inicio y el quinto término comenzando desde el final en el desarrollo de $\left(\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ es $\sqrt{6} : 1$, entonces, el valor de n es:

A. 6
B. 12
C. 10
D. 8
E. 13

Solución:
En el desarrollo de $\left(\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ se tiene que

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{n}{4}\left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4 \quad : 5° \text{ término desde el inicio.}$$

$$T_{n+2-k} = T_{n+2-5} = T_{n-3} = \binom{n}{n-4}\left(\sqrt[4]{2}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{n-4} \quad : 5° \text{ término desde el final.}$$

Entonces:

$$\frac{\binom{n}{4}\left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4}{\binom{n}{n-4}\left(\sqrt[4]{2}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{n-4}} = \sqrt{6}:1$$

$$\frac{\binom{n}{4}\left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-8}}{\binom{n}{n-4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{n-8}} = \sqrt{6}$$

$$\frac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-8}}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{n-8}} = \sqrt{6}$$

$$\left(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{3}\right)^{n-8} = \sqrt{6}$$

$$\left(\sqrt[4]{6}\right)^{n-8} = \sqrt{6} \rightarrow n = 10$$

■

Ejercicio 9.8 Si los coeficientes del quinto, sexto y séptimo término de la expansión $(1+x)^n$ están en P.A., entonces, el valor de n es:

A. Solo 7. B. Solo 14. C. 7 o 14. D. -7

Solución
Los términos de la P.A. son

$$T_5 = \binom{n}{4}x^4, \quad T_6 = \binom{n}{5}x^5 \; y \; T_7 = \binom{n}{6}x^6$$

y sus coeficientes

$$\binom{n}{4}, \binom{n}{5}, \binom{n}{6}$$

forman una P.A, de modo que:

$$
\begin{aligned}
2\binom{n}{5} &= \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \\
2 &= \frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}} + \frac{\binom{n}{6}}{\binom{n}{5}} \\
2 &= \frac{5}{n-5+1} + \frac{n-6+1}{6} \\
2 &= \frac{5}{n-4} + \frac{n-5}{6} \\
2 &= \frac{30 + (n-5)(n-4)}{6(n-4)} \\
12n - 48 &= 50 + n^2 - 9n \\
n^2 - 21n + 98 &= 0 \\
(n-14)(n-7) &= 0 \\
&\rightarrow n = 14 \vee n = 7
\end{aligned}
$$

Ejercicio 9.9 Si $x \in \mathbb{N}$, y $\frac{(x+2)!}{(2x-1)!} \cdot \frac{(2x+1)!}{(x+3)!} = \frac{72}{7}$, entonces, $x^2 - 3x + 1$ es igual a:

A. 9 B. 4 C. 5 D. 6 E. 12

Solución
Sea

$$
\begin{aligned}
\frac{(x+2)!}{(2x-1)!} \cdot \frac{(2x+1)!}{(x+3)!} &= \frac{72}{7} \\
\frac{(x+2)!}{(2x-1)!} \cdot \frac{(2x+1)(2x)(2x-1)!}{(x+3)(x+2)!} &= \frac{72}{7} \\
\cdot \frac{(2x+1)(2x)}{(x+3)} &= \frac{72}{7} \\
7\left(4x^2 + 2x\right) &= 72(x+3) \\
28x^2 + 14x &= 72x + 216 \\
28x^2 - 58x - 216 &= 0 \\
14x^2 - 29x - 108 &= 0 \\
&\rightarrow x = 4, x = -\frac{27}{14} \notin \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Luego, $(4)^2 - 3(4) + 1 = 5$.

Ejercicio 9.10 Si en el desarrollo de $\left(2a-\frac{a^2}{4}\right)^9$ la suma de los términos centrales es S, entonces:

A. $S=\frac{63}{32}a^{14}\left(a+8\right)$

B. $S=\frac{63}{32}a^{13}\left(a-8\right)$

C. $S=\frac{63}{32}a^{14}\left(a-8\right)$

D. $S=\frac{63}{32}a^{14}\left(8-a\right)$

Solución
Si $n=9$, la expansión del binomio tiene dos términos del medio T_5 y T_6, luego:

$$T_5=\binom{9}{4}(2a)^5\left(-\frac{a^2}{4}\right)^4=\binom{9}{4}32a^5\frac{a^8}{256}$$
$$\rightarrow T_5=\frac{126\cdot 32}{256}a^{13}=\frac{63}{4}a^{15}$$
$$T_6=\binom{9}{5}(2a)^4\left(-\frac{a^2}{4}\right)^5=\binom{9}{5}\left(16a^4\right)\frac{a^{10}}{1024}$$
$$\rightarrow T_6=\frac{126\cdot 16}{1024}a^{14}=\frac{63}{32}a^{14}$$

Entonces:

$$\rightarrow T_5+T_6=\frac{63}{4}a^{15}+\frac{63}{32}a^{14}=\frac{63}{32}a^{14}\left(a+8\right)$$

■

Problemas Propuestos

Problema 9.1 Si $p \in \mathbb{R}$ y el término central en el desarrollo del binomio $\left(\frac{p}{2}+2\right)^8$ es 1120, determine el valor de p.
Solución: ± 2

Problema 9.2 Encuentre la razón entre el coeficiente de x^{15} y el término independiente de x en el desarrollo del binomio $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{15}$.
Solución: $1:32$

Problema 9.3 En el desarrollo del binomio $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ el término de lugar $(k+1)$ contiene potencias de a y b cuyos exponentes son iguales, entonces, encuentre el valor de k.
Solución: $k=9$

Problema 9.4 Sea $x \in \mathbb{N}$. Resuelve la ecuación para x: $\frac{(2x)!}{3!\,(2x-3)!}:\frac{(x)!}{2!\,(x-2)!}=\frac{44}{3}$
Solución: $x=6$

Problema 9.5 Sea $x>0$. Si $T_7=729$ en el desarrollo de $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{84}}+\sqrt{3}\ln x\right)^9$, encuentre el valor de x.
Solución: $x=e$

Problema 9.6 Si los coeficientes $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ y $\binom{n}{6}$ forman una progresión aritmética, determine el valor de n.
Solución: $n=14$

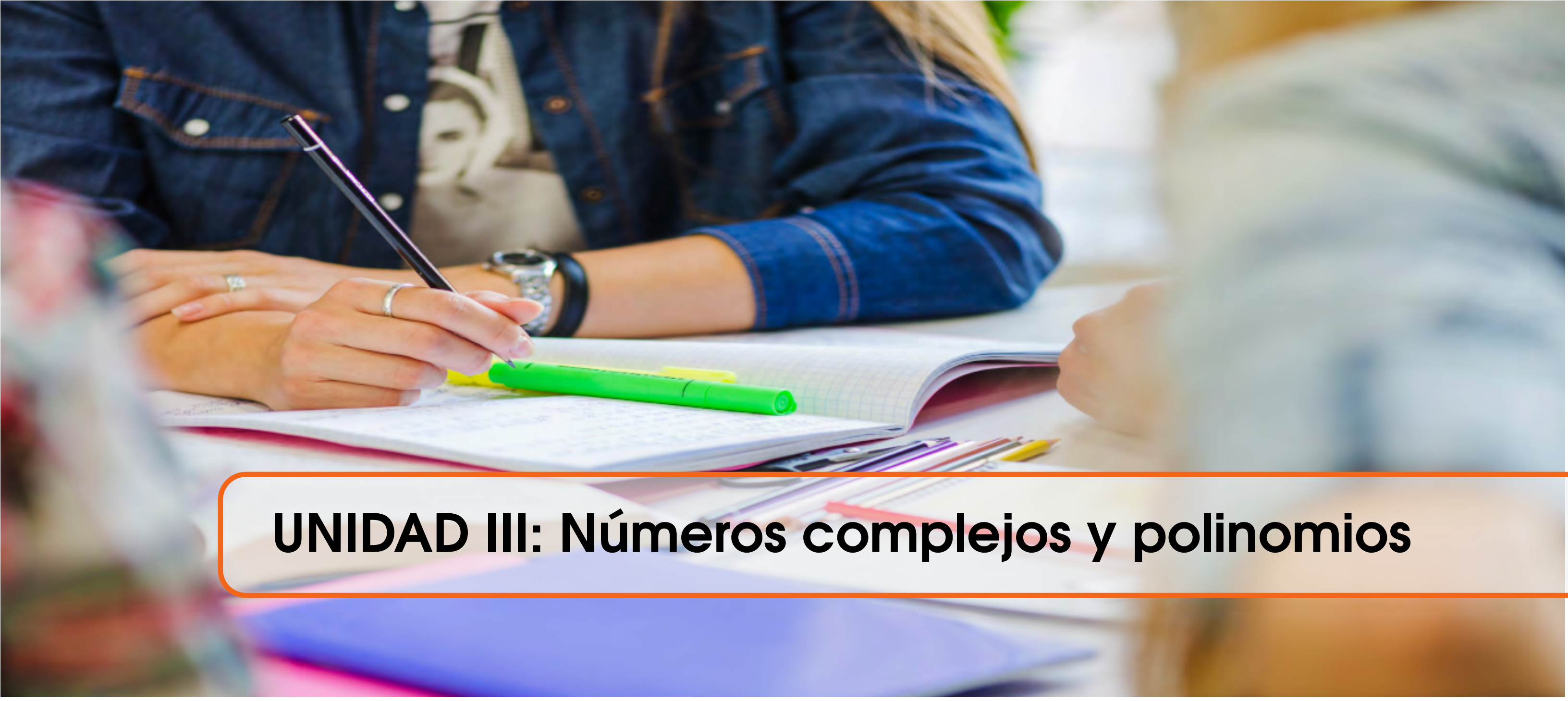
Problema 9.7 Para el desarrollo del binomio $\left(\frac{y}{3}+\frac{2}{3\cdot\sqrt{y}}\right)^{12}$ obtenga (si es posible) el término que contiene a y^5.
Solución: No existe un término que contenga a y^5.

Problema 9.8 En el binomio $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$, si la razón entre el séptimo término comenzando desde el inicio y el séptimo término comenzando desde el final es $1:6$, halle el valor de n.
Solución: $n=9$

Problema 9.9 Si los coeficientes de los términos de lugar $(r-5)$ y $(2r-1)$ en la expansión de $(1+x)^{34}$ son iguales, encuentre el valor de r.
Solución: $r=14$

Problema 9.10 Determine el coeficiente de x^7en el desarrollo de $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$.

Solución: $\binom{11}{5}\frac{a^6}{b^5}$



UNIDAD III: Números complejos y polinomios

Resultados de Aprendizaje

R1. Determinar la parte real e imaginaria de un número en forma binomial a partir del uso de las propiedades de los números complejos.

R2. Determinar el cociente y resto de una división de polinomios a través del algoritmo de la división.

R3. Resolver ecuaciones polinomiales para encontrar las raíces de un polinomio.

Contenidos

- Representación cartesiana de un complejo.
- Suma y producto con complejos (forma cartesiana y binomial).
- División de complejos (forma cartesiana y binomial).
- Potencias de la unidad imaginaria.
- Forma polar de un complejo (definición, transformaciones, representación geométrica).
- Definición de un polinomio.
- Operaciones de adición y multiplicación.
- Algoritmo de la división.
- División sintética.
- Teorema del factor y teorema del resto.
- Factorización de polinomios, hallar raíces enteras y fraccionarias, regla de los signos de Descartes.

10. Números Complejos

Resumen

Unidad imaginaria

Sea $i^2 = -1 \leftrightarrow i = \sqrt{-1}$

Operatoria con números complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ números complejos en la forma binomial, entonces:

a) $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad$ y $\quad b = d$

b) $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

c) $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

d) $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

e) $z_1 : z_2 = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac - adi + bic - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

Propiedades de la suma

Sean $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ y $z_3 = e + fi$, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Clausura: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

b) Conmutatividad: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

c) Asociatividad: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

d) Elemento neutro: $\forall\ z_1 \in \mathbb{C},\ \exists\ z = 0 + 0i$ tal que $z_1 + z = z + z_1 = z_1$

e) Elemento inverso: $\forall\ z_1 = a + bi \in \mathbb{C}, \exists - z_1 = -a - bi$ tal que $z_1 + (-z_1) = 0 + 0i$

Propiedades de la multiplicación

Sean $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ y $z_3 = e + fi$, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Clausura: $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$

b) Conmutatividad: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

c) Asociatividad: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

d) Elemento neutro: $\forall\ z_1 = a + bi, \exists\ z = 1 + 0i$ tal que $z_1 \cdot z = z \cdot z_1 = z_1$

e) Elemento inverso: $\forall\ z_1 = a + bi \neq 0 + 0i \in \mathbb{C},\ \exists\ z_1^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i \right)$ tal que $z_1 \cdot z_1^{-1} = z_1^{-1} \cdot z_1 = 1 + 0i$

f) Distributividad: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Potencias de i

La unidad imaginaria i se define $\sqrt{-1}$. Además:

a) $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

b) $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

c) $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$

d) $i^5 = i^3 \cdot i^2 = -i \cdot -1 = i$

e) $i^6 = i^3 \cdot i^3 = -i \cdot -i = i^2 = -1$

Conjugado de un número complejo

Si $z = a + bi$, entonces, su conjugado es $\overline{z} = a - bi$.

- **Propiedades.** Sean $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$.

a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c) $z_1 = \overline{\overline{z_1}}$

d) $\overline{(z_1)}^{-1} = \overline{(z_1)^{-1}},\ z_1 \neq (0,0)$

e) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2} \right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq (0,0)$

f) $Re(z_1) = \dfrac{z_1 + \overline{z}_1}{2}$

g) $Im(z_1) = \dfrac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}$

Módulo de un número complejo

Si $z = a + bi$, entonces, el módulo de z se define como $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- **Propiedades.** Sean $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

a) $z_1 \neq 0 + 0i \Longrightarrow \|z\| > 0$

b) $\|z_1\| = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0 + 0i$

c) $\|z_1\| = \|-z_1\| = \|\overline{z}_1\|$

d) $\|z_1\|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$

e) $\left\| \dfrac{z_1}{z_2} \right\| = \dfrac{\|z_1\|}{\|z_2\|}, \ z_2 \neq 0 + 0i$

f) $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

g) $|Im(z)| \leq \|z\|$

h) $|Re(z)| \leq \|z\|$

i) $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 10.1 Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $z_1 = 3x - 2 + yi - 5i$ y $z_2 = -xi + 1 + 4y + 3i$ son iguales, enntonces, $(x - 3y)$ es igual a:

A. 5 B. -4 C. 3 D. -5 E. 4

Solución
Sea

$$(3x-2)+(y-5)\,i=(4y+1)+(-x+3)\,i.$$

Entonces:

$$\begin{array}{c} 3x-2=4y+1 \\ y-5=-x+3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3x-4y=3 \\ x+y=8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3x-4y=3 \\ 4x+4y=32 \end{array} \rightarrow 7x=35 \rightarrow x=5, y=3$$

Luego, $\rightarrow x - 3y = 5 - 9 = -4.$ ■

Ejercicio 10.2 Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $z_1 = 4 + (x+2)\,i$, $z_2 = (x - 2y) + 6i$ y $z_3 = y + (2x + y)\,i$. Si $z_1 + z_2 + z_3 = -4 - 8i$, entonces, $y - 3x$ es igual a:

A. -18 B. 9 C. -1 D. 20 E. -2

Solución

$$\begin{aligned} z_1+z_2+z_3 &= -4-8i \\ 4+(x+2)\,i+(x-2y)+6i+y+(2x+y)\,i &= -4-8i \\ (4+x-2y+y)+(x+2+6+2x+y)\,i &= -4-8i \\ \rightarrow (4+x-y)+(3x+y+8)\,i &= -4-8i \end{aligned}$$

Por la igualdad de números complejos, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{c} 4+x-y=-4 \\ 3x+y+8=-8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} x-y=-8 & (1) \\ 3x+y=-16 & (2) \end{array} \rightarrow x=-6, y=2$$

Entonces, $y - 3x = 20.$ ■

Ejercicio 10.3 Sea $z = 2 + (x - 4i)\,(2 + xi)$. Halle los valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $Im(z) = 0$.

A. $\pm 2\sqrt{2}$ B. $\pm \frac{1}{3}$ C. ± 2 D. $\pm \sqrt{2}$ E. $\pm \sqrt{3}$

Solución

Desarrollando, se tiene:

$$
\begin{aligned}
z &= 2 + (x - 4i)(2 + xi) \\
&= 2 + 2x + x^2 i - 8i + 4x \\
&= (2 + 6x) + \left(x^2 - 8\right) i \quad \text{(Recuerde que } z \in \mathbb{R}\text{, siempre que } Im(z) = 0\text{).}
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow z \in \mathbb{R} \leftrightarrow x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

■

Ejercicio 10.4 Sea $z \in \mathbb{C}$ y $Re(z)$ la parte real de z. La suma de las raíces distintas de la ecuación $z^2 + 2Re(z) + 1 = 0$ es igual a :

A. 0 B. 1 C. -1 D. 2i E. -2i

Solución
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $z = a + bi$. De esta forma:

$$
\begin{aligned}
z^2 + 2Re(z) + 1 &= 0 \\
(a + bi)(a + bi) - 2a + 1 &= 0 \\
\left(a^2 - b^2\right) + 2abi - 2a + 1 &= 0 \\
\left(a^2 - b^2 - 2a + 1\right) + 2abi &= 0
\end{aligned}
$$

Un número complejo es nulo cuando sus partes real e imaginaria son iguales a cero. Necesariamente, tenemos $2ab = 0$, y donde existen otras posibilidades:

$$
\begin{aligned}
&a = 0 \rightarrow 0^2 - b^2 + 2(0) + 1 = 0 \rightarrow b^2 = 1 \rightarrow b = \pm 1 \rightarrow z = i \quad \vee \quad z = -i \\
&b = 0 \rightarrow a^2 - 0^2 + 2(a) + 1 = 0 \rightarrow (a + 1)^2 = 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow z = -1
\end{aligned}
$$

Luego, la suma de las raíces es $i + (-i) + 1 = -1$. ■

Ejercicio 10.5 Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z - \overline{z} + z \cdot \overline{z} = 2 + 2i$. La suma de las raíces que satisfacen la ecuación es:

A. 2 B. $2i$ C. 1 D. i E. $-2i$

Solución
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $z = a + bi$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
z - \overline{z} + z \cdot \overline{z} &= 2 + 2i \\
\rightarrow (a + bi) - (a - bi) + (a + bi)(a - bi) &= 2 + 2i \\
\rightarrow 2bi + a^2 + b^2 &= 2 + 2i \\
\rightarrow \left(a^2 + b^2 - 2\right) + (2b - 2) i &= 0
\end{aligned}
$$

De esta forma:

$$2b - 2 = 0 \rightarrow b = 1$$
$$a^2 + b^2 - 2 = 0 \rightarrow a^2 + 1 - 2 = 0 \rightarrow a = \pm 1$$

Luego, las soluciones son $1 + i$ y $-1 + i$, y cuya suma vale $2i$. ■

Ejercicio 10.6 Sean $y > 0, x \in \mathbb{R}$ tal que $z = 9y^2 - 4 - 10xi$ y $w = 8y^2 + 20i^7$ son conjugados entre sí. Determine el valor de $|y| + x$.

A. 0 B. 2 C. 4 D. -2 E. 5

Solución
Sean $z = 9y^2 - 4 - 10xi$ y $w = 8y^2 + 20i^7 = 8y^2 - 20i$ tal que $\overline{z} = w$.
Entonces:

$$9y^2 - 4 + 10xi = 8y^2 - 20i$$
$$9y^2 - 4 = 8y^2 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$
$$10x = -20 \rightarrow x = -2$$

Luego: $|y| + x = 0$

■

Ejercicio 10.7 Sea $i^2 = -1$ y $S = i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{2003}$, entonces, el valor de S es igual a:

A. 0 B. -1 C. 1 D. i-1 E. i+1

Solución

$$S = i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{2003}$$
$$S = \left(i + i^2 + i^3 + i^4\right) + \left(i^5 + i^7 + i^8 + i^9\right) + ... + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003}$$
$$S = (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + ... + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003}$$
$$S = 0 + 0 + ... + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003}$$
$$S = i + (-1) + i$$
$$S = -1$$

■

Ejercicio 10.8 Sea $i^2 = -1$. El valor de la suma $S = \sum_{n=1}^{13} (i^n + i^{n+1})$ es igual a:

A. i B. $-1+i$ C. $-i$ D. 0 E. 1

Solución

$$S = \sum_{n=1}^{13} (i^n + i^{n+1}) = \sum_{n=1}^{13} i^n + \sum_{n=1}^{13} i^{n+1} = \sum_{n=1}^{13} i^n + i\sum_{n=1}^{13} i^n = (1+i)\sum_{n=1}^{13} i^n$$
$$S = (1+i)(i) = i - i^2 = -1 + i.$$

■

Ejercicio 10.9 Sea $i^2 = -1$. El resultado de $\dfrac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i}$ es:

A. $-1-3i$ B. $-13-39i$ C. $-\dfrac{13}{5} + \dfrac{39}{5}i$ D. $-\dfrac{13}{5} - \dfrac{39}{5}i$ E. $\dfrac{13}{5} - \dfrac{39}{5}i$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i} &= \frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i} \cdot \frac{(-1-3i)}{(-1-3i)} \\
&= \frac{[18+8+12i-12i](-1-3i)}{1+9} \\
&= \frac{26}{10}(-1-3i) \\
&= -\frac{13}{5} - \frac{39}{5}i
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 10.10 Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \dfrac{a+i}{a-i}$, entonces, el valor de a es:

A. $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ B. $\frac{1}{2} - 4\sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ E. $2 + \sqrt{3}$

Solución
Sea:

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{a+i}{a-i}$$
$$\left(\sqrt{3}+i\right)(a-i) = 2a + 2i$$
$$\to a(\sqrt{3} - 2 + i) = (\sqrt{3}+2)i - 1$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
a = \frac{(\sqrt{3}+2)i-1}{(\sqrt{3}-2)+i} &= \frac{\left[(\sqrt{3}+2)i-1\right]\left[(\sqrt{3}-2)-i\right]}{\left[(\sqrt{3}-2)+i\right]\left[(\sqrt{3}-2)-i\right]} \\
&= \frac{(3-4)i-\sqrt{3}+2+i+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)^2+1} \\
&= \frac{4}{8-4\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2-\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

■

Problemas Propuestos

Problema 10.1 Sea la ecuación $z^2+3z+4=0$. Determine las soluciones reales o complejas.
Solución: $z_1=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$, $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$

Problema 10.2 Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Si $z_1=(2a-b)-(a-6)i$, $\quad z_2=(a-3)-(1-b)i$ y $z_1=z_2$, encuentre los valores de las constantes a y b.
Solución: $a=2, b=5$.

Problema 10.3 Determine $Re(z)$ y $Im(z)$ si $z=\dfrac{(1+2i)^2}{i}+i^{19}$
Solución: $Re(z)=4, Im(z)=-4$

Problema 10.4 Si$z_1=5+10i$, $z_2=3+8i$ y $z_3=1+2i$ representan los vértices de un triángulo en el plano complejo. Determine el tipo de triángulo.
Solución: Escaleno.

Problema 10.5 Sea $i^2=-1$ y $P=i^k+i^l+i^m+i^n$ tal que $k,l,m,n\in\mathbb{Z}^+$ y consecutivos, halle el valor de P.
Solución: $P=0$

Problema 10.6 Sea $i^2=-1$ y $w=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. Halle el valor de w^{1929}. Indicación: obtenga primero el valor de w^2.
Solución: $w=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Problema 10.7 Si z es un raíz de la ecuación $z^7+1=0$ y $T=z^{86}+z^{175}+z^{289}$, determine el valor de T.
Solución: $T=-1$

Problema 10.8 Determine el valor de $\sum\limits_{n=1}^{17}\left(i^n-i^{n+1}\right)$
Solución: $1+i$

Problema 10.9 Si $a+bi=\sum\limits_{k=1}^{101}i^k$, halle el par ordenado (a,b).

Solución: $(a,b)=(0,1)$

Problema 10.10 Dados $w=2+3i$; $z=-2-i$. Encuentre $\dfrac{\overline{z}-\overline{w}}{z\cdot\overline{z}+w\cdot\overline{w}}$
Solución: $\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}i$

Problema 10.11 Sean $z=-3+x^2yi$ y $w=(x^2+y)+4i$, determine los valores de x y y de modo que z y w sean conjugados entre sí.
Solución: $x=\pm1, y=4$.

Problema 10.12 Si $z=-3+4i$, halle el valor de $|z|^2-2|z|+\dfrac{1}{|z|}$
Solución: $\frac{76}{5}$

Problema 10.13 Halle el módulo de $z=\dfrac{(2-3i)^4\cdot(1-i)^6}{(5+i)^4}$

Solución: $|z| = 2$

Problema 10.14 Sea $z = \dfrac{(3b - 2ai)}{(4 - 3i)}$ tal que $\mathrm{Im}(z) = 0$ y $|z| = 1$. Determine los valores de las constantes a y b.
Solución: $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{4}{3}$

Problema 10.15 Sea $z = x + yi$. Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 2$ y $|z| = |z - 1|$.
Solución: $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i, z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i$

Problema 10.16 Sea $z = x + yi$ tal que $\left|\dfrac{z - i}{z + 2i}\right| = 1$ y $|z| = \dfrac{5}{2}$. Halle el valor de $|z + 3i|$.

Solución: $7/2$

Problema 10.17 Sea $z = \dfrac{-1 + pi}{p - 2i}$ tal que $Re(z) = 0$, determine el valor de la constante p.

Solución: $p = 0$

Problema 10.18 Si $z = x + yi$ satisface la ecuación $\left|\dfrac{z - 5i}{z + 5i}\right| = 1$, entonces, el complejo z se encuentra ubicado en:

A. El eje x.

B. La recta $y = 5$.

C. Un círculo que pasa por el origen.

D. El eje y.

Solución: A

Problema 10.19 Sea $i^2 = -1$ y $z = x + yi$. Entonces, la ecuación $|z - i| = |z - 1|$, representa:

A. Un círculo de radio $\frac{1}{2}$.

B. Una recta que pasa por el origen con pendiente 1.

C. Un círculo de radio 1.

D. Una recta que pasa por origen con pendiente -1.

Solución: B

11. Polinomios

Resumen

Algoritmo de la división

- Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios no nulos tal que $grad(p(x)) \geq grad(q(x))$, entonces, existen polinomios únicos $s(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$ donde $r(x) = 0$ o $grad(r(x)) < grad(q(x))$.
  El polinomio $s(x)$ se denomina cociente y $r(x)$ se llama resto.
- Si $p(x)$ es divisible por $q(x)$ (es decir, $r(x) = 0$), entonces, se tiene: $p(x) = q(x) \cdot s(x)$

Raíces de un polinomio

- Sea $p(x)$ un polinomio. Se dice que a es una raíz (o cero) de $p(x)$ si y solo si: $p(a) = 0$

Teorema del resto

- Sea el polinomio $p(x)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces, el resto al dividir $p(x)$ por $(x - c)$ es $p(c)$.

Teorema del factor

- Sea $p(x)$ un polinomio y $c \in \mathbb{R}$, entonces, c es raíz de $p(x)$ si y solo si $p(x)$ es divisible por $(x - c)$.

Raíces racionales

- Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes enteros y $a, b \in \mathbb{Z}$ sin divisores en común.
  Si $\dfrac{a}{b}$ es raíz $p(x)$, entonces, (a divide a a_0) y (b divide a a_n).

Ejercicios resueltos

Ejercicio 11.1 Sean $p,q \in \mathbb{R}$. Dado el polinomio $p(x) = ab + bx + ax^2 + x^3$, tal que $p(1) = 2p(-1) = 12$, entonces, el valor de $a + b$ es:

A. 5 B. 7 C. 9 D. 12 E. 8

Solución

$$
\begin{aligned}
p(1) &= 12 \\
p(1) = ab + b(1) + a(1)^2 + (1)^3 &= 12 \\
\rightarrow p(1) = ab + b + a + 1 &= 12 \qquad (1) \\
2p(-1) &= 12 \rightarrow p(-1) = 6 \\
\rightarrow p(-1) = ab + b(-1) + a(-1)^2 + (-1)^3 &= 6 \\
\rightarrow p(-1) = ab - b + a - 1 &= 6 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Restando (1)-(2), se obtiene:

$$2b + 2 = 6 \rightarrow b = 2$$

Sustituyendo en (2):

$$2a - 2 + a = 6 \rightarrow a = 3$$

Luego: $a + b = 5$ ■

Ejercicio 11.2 Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$. El polinomio $p(x) = (a-1)x^3 + (b+2)x - (2c-3)$ es idénticamente nulo, entonces, el valor de $(a - b + 2c)$ es igual a:

A. -8 B. 12 C. 6 D. -6 E. 14

Solución
Los coeficientes de $p(x)$ deben ser nulos, entonces:

$$-(2c-3) = 0,\ b + 2 = 0,\ a - 1 = 0$$

Se tiene que $a = 1,\ b = -2,\ c = \frac{3}{2}$
Observe que el término en x^2 fue omitido, puesto que su coeficiente es igual a cero.
Luego:

$$a - b + 2c = 1 + 2 + 3 = 6$$

■

Ejercicio 11.3 Sea el polinomio $p(x) = \left(a^2 - 3a + 2\right)x^3 + (a-1)x - (a-2)$.
¿Cuál de las siguientes alternativas es falsa?:

A. Si $a \neq 1 \quad y \quad a \neq 2$ entonces $grad(p(x)) = 3$.

B. Si $a = 1$ entonces $grad(p(x)) = 0$.

C. Si $a = 2$ entonces $grad(p(x)) = 1$.

D. Si $a = 3$ entonces $grad(p(x)) = 2$.

Solución
Si $a^2 - 3a + 2 \neq 0 \rightarrow a \neq 1$, $y\ a \neq 2$, luego $grad(p(x)) = 3$.
Si $a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = 1\ o\ a = 2$, luego $grad(p(x)) = 0$.
Si $a = 2 \rightarrow p(x) = x$, luego $grad(p(x)) = 1$.
Si $a = 3 \rightarrow p(x) = 2x^3 + 2x + 1$, luego $grad(p(x)) = 3$. Falso ■

Ejercicio 11.4 Sean $m \in \mathbb{R}$. Si $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4x - m$ es divisible por $q(x) = 2x + 1$, entonces, el cociente de la división es:

A. $c(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{19}{8}x + \frac{51}{16}$

B. $c(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{19}{8}x - \frac{51}{16}$

C. $c(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{19}{8}x + \frac{51}{16}$

D. $c(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{19}{8}x - \frac{51}{16}$

Solución

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -5 & 4 & -m & -\dfrac{1}{2} \\
\hline
 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{19}{8} & -\dfrac{51}{16} & \\
\hline
1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{19}{4} & \dfrac{51}{8} & -m-\dfrac{51}{16} &
\end{array}$$

La división es exacta si el resto es nulo: $-m - \dfrac{51}{16} = 0 \rightarrow m = -\dfrac{51}{16}$
Luego, el cociente es: $c(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{19}{8}x + \dfrac{51}{16}$ ■

Ejercicio 11.5 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $p(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$, tal que $p(x) + 1$ es divisible por $(x + 1)$ y $p(x) - 1$ es divisible por $(x - 1)$, entonces, $(2a - 3b)$ es igual a:

A. 3 B. -1 C. 2 D. 6 E. -2

Solución
Si $p(x)+1=x^3+2x^2+ax+b+1$ es divisible por $(x+1)$, entonces:

$$\begin{aligned} p(-1)+1 &= (-1)^3+2(-1)^2+a(-1)+b+1=0 \\ p(-1)+1 &= -a+b=-2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Si $p(x)-1=x^3+2x^2+ax+b-1$ es divisible por $(x-1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} p(1)-1 &= (1)^3+2(1)^2+a(1)+b-1=0 \\ p(1)-1 &= a+b=-2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2) en forma simultánea $a=0$ y $b=-2$, luego, $2a-3b=6$. ■

Ejercicio 11.6 Un polinomio $p(x)$ dividido por (x^2-1) da resto $(2x+1)$. Otro polinomio $g(x)$ dividido por x^2-3x+2 da resto $(x+2)$. Entonces, el resto de la división de $s(x)=p(x)+g(x)$ por $(x-1)$ es:

A. 12 B. 6 C. 9 D. -4 E. 7

Solución
Se tiene que

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2-1)q(x)+(2x+1) \qquad (1) \\ g(x) &= (x^2-3x+2)q'(x)+(x+2) \qquad (2) \end{aligned}$$

El resto de la división de $s(x)$ por $(x-1)$ es $r=s(1)=p(1)+g(1)$.
De (1) y (2) se tiene que $p(1)=3$ y $g(1)=3$.
Luego, el resto de la división de $s(x)$ por $(x-1)$ es $s(1)=3+3=6$. ■

Ejercicio 11.7 En la división del polinomio $p(x)$ por $q(x)=x-k$, se utiliza el algoritmo de la división sintética y se obtiene el siguiente esquema:

3	0	c	e	g	5	k
	b	d	f	h	i	
a	-3	4	-5	5	j	

Rellene los valores de las constantes $a,b,c,d,...,i,j,k$ en el esquema.

Entonces $p(x)$ y $r(x)$ respectivamente, son :

A. $p(x)=3x^5-x^3-x^2+5$ y $r(x)=1$

B. $p(x)=3x^5-x^3-x^2-5$ y $r(x)=2$

C. $p(x)=3x^5+x^3-x^2+5$ y $r(x)=0$

D. $p(x)=3x^5-x^3+x^2+5$ y $r(x)=-1$

E. $p(x) = 3x^5 + x^3 + x^2 + 5$ y $r(x) = -2$

Solución
De la tabla se deduce $a = 3$.

$$\begin{array}{ll}
\rightarrow (a \cdot k = b \quad \wedge \quad 0 + b = -3) & \rightarrow (0 + 3k = -3 \rightarrow k = -1 \quad \wedge \quad b = -3) \\
\rightarrow (-3 \cdot k = d \quad \wedge \quad c + d = 4) & \rightarrow (d = 3 \quad \wedge \quad c = 1) \\
\rightarrow (4 \cdot k = f \quad \wedge \quad e + f = -5) & \rightarrow (f = -4 \quad \wedge \quad e = -1) \\
\rightarrow (-5 \cdot k = h \quad \wedge \quad g + h = 5) & \rightarrow (h = 5 \quad \wedge \quad g = 0) \\
\rightarrow (5 \cdot k = i \quad \wedge \quad 5 + i = j) & \rightarrow (i = -5 \quad \wedge \quad j = 0)
\end{array}$$

Luego: $a = 3, c = 1, e = -1, g = 0$ y $p(x) = 3x^5 + x^3 - x^2 + 5$ y $r(x) = 0$. ▪

Ejercicio 11.8 Sean $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + mx + n$ es divisible por $q(x) = 2x^2 + x - 1$, entonces, el cociente $\dfrac{m}{n}$ es igual a:

A. 5 B. $\frac{11}{5}$ C. -$\frac{11}{5}$ D. $\frac{16}{5}$ E. $-\frac{3}{2}$

Solución
Se disponen el dividendo y el divisor de acuerdo al algoritmo de la división:

$$\begin{array}{ll}
4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + mx + n & : \ 2x^2 + x - 1 = 2x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4} \\
\underline{4x^4 + 2x^3 - 2x^2} & \\
\quad 3x^3 \ - x^2 \ + mx + n & \\
\quad \underline{3x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x} & \\
\qquad -\dfrac{5}{2}x^2 + \left(m + \dfrac{3}{2}\right)x + n & \\
\qquad \underline{-\dfrac{5}{2}x^2 \quad -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{4}} & \\
\qquad\qquad \left(m + \dfrac{11}{4}\right)x + \left(n - \dfrac{5}{4}\right) &
\end{array}$$

Si $p(x)$ es divisible por $q(x)$, entonces, $r(x) = 0$,
luego: $\left(m + \dfrac{11}{4}\right) = 0 \wedge \left(n - \dfrac{5}{4}\right) = 0$
$\rightarrow m = -\dfrac{11}{4} \wedge n = \dfrac{5}{4} \rightarrow = \dfrac{m}{n} = -\dfrac{11}{5}$
▪

Ejercicio 11.9 Sean $h, k \in \mathbb{R}$. Si $(x+2)$ y $(x-1)$ son factores de $p(x) = 2x^3 - hx + k$, entonces, el valor de $(2h-3k)$ es:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1 E. 0

Solución
De acuerdo al enunciado $p(x) = 2x^3 - hx + k = (x+2)(x-1) \cdot m$
Es decir: $p(x) = 2x^3 - hx + k = \left(x^2 + x - 2\right) \cdot m$
Luego:

$$\begin{array}{l}
2x^3 + 0x^2 - hx + k \quad : \; x^2 + x - 2 \; = 2x - 2 \\
\underline{2x^3 + 2x^2 - 4x} \\
\quad -2x^2 + (-h+4)x + k \\
\underline{\quad -2x^2 \qquad -2x + 4} \\
\qquad (-h+6)x + (k-4)
\end{array}$$

Entonces:

$$-h + 6 = 0 \to h = 6$$

$$k - 4 = 0 \to k = 4$$

Po lo tanto, $2h - 3k = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (4) = 0$. ■

Ejercicio 11.10 Sea $p(x)$ un polinomio tal que $grad(p(x)) = 4$, $p(-2) = 48$ y $p(3) = 8$. Si $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 2$ son raíces de $p(x)$, entonces $p(x)$ es:

A. $p(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

B. $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

C. $p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

D. $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

Solución

Si $x_1 = 1$ es raíz de $p(x) \to (x-1)$ es un factor de $p(x)$.
Si $x_2 = -1$ es raíz de $p(x) \to (x+1)$ es un factor de $p(x)$.
Si $x_3 = 2$ es raíz de $p(x) \to (x-2)$ es un factor de $p(x)$.

Entonces $p(x)$ es de la forma: $p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(ax+b)$

$$\to p(-2) = (-3)(-1)(-4)(-2a+b) = 48 \to p(-2) = -2a + b = -4 \qquad (1)$$
$$\to p(3) = (2)(4)(1)(3a+b) = 8 \to p(3) = 3a + b = 1 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) en forma simultánea: $a = 1$, $b = -2$

Luego:

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x-2) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$$

Problemas Propuestos

Problema 11.1 Sean los polinomios $p(x) = -3x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ y $q(x) = -2x^4 - 3x + 7$. Determine:

A. $p(2) - 6q(-2)$

B. El valor de A de modo que $p(-1) = \frac{1}{3}A + 3q(-1)$

Solución: A. -309 B. -126

Problema 11.2 Sean $l = (6x-2)$, $h = (x-1)$, $w = 2x$ respectivamente, las medidas de las aristas de una caja. Determine:

A. Un polinomio $s(x)$ que represente la superficie total.

B. Un polinomio $v(x)$ que represente el volumen.

C. La superficie total si $x = 4$.

D. El volumen de la caja si $x = 3$.

Solución: A. $s(x) = 40x^2 - 28x + 4$ B. $v(x) = 12x^3 - 16x^2 + 4x$ C. 532 unidades de superficie. D. 192 unidades de volumen

Problema 11.3 Determine $p(x)$ tal que $grad(p(x)) = 4$ y cuyas raíces son: $x_1 = 2 - i$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$.
Solución: $x^4 - x^3 - 17x^2 + 55x - 50$

Problema 11.4 Aplique el algoritmo de la división para determinar el cociente y el resto de la división de $p(x) = 4x^3 + x^2 - 30$ por $q(x) = x - 2$.
Solución: $c(x) = 4x^2 - 9x + 18$, $r(x) = 6$

Problema 11.5 Si al dividir $p(x) = x^2 + 2x - 4$ por $(x - a)$, el resto es 31. Determine el valor de la constante a.
Solución: $a = 5$, $a = -7$

Problema 11.6 Si el polinomio $p(x) = 3x^5 + 6x^3 - 3x$ se divide por $q(x) = x + 1$, se obtiene un cociente de grado m, un término constante b y un resto a. Halle $(m + a + b)$.
Solución: 4

Problema 11.7 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre el valor de las constantes a y b de modo que al dividir el polinomio $p(x) = x^4 - 5x^3 + ax^2 + bx - 1$ por $(x+1)$ dé resto 4, y al dividirlo por $(x-2)$ dé resto 2.
Solución: $a = \dfrac{25}{6}, b = \dfrac{31}{6}$

Problema 11.8 Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 3 de modo que tenga como raíces 3,2 y $-\frac{1}{2}$ y el resto que se obtenga al dividirlo por el polinomio $(x+1)$ es -12.
Solución. $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

Problema 11.9 Sean $h, k \in \mathbb{R}$. Si $(x+2)$ y $(x-1)$ son factores de $p(x) = 2x^3 - hx + k$, determine el valor de $(2h - 3k)$.
Solución: $2h - 3k = 0$

Problema 11.10 Sean $k \in \mathbb{R}$. Si $(x+2)$ es un factor de $p(x) = x^4 + kx^3 + 5x^2 + 6x - 30$.

Determine el valor de la constante k .
Solución: $k = -\frac{2}{3}$

Problema 11.11 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $p(x) = x^3 - 11x^2 - bx + a$ es divisible por $q(x) = x^2 - 9$, halle el valor de $(a + b)$.
Solución: 108

Problema 11.12 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $p(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ es divisible por $x^2 - 4$, determine el valor de los coeficientes a y b.
Solución: $a = -4, \quad b = -24$.

Problema 11.13 Sean $p, q \in \mathbb{R}$. Si el polinomio $s(x) = px^3 + x^2 - 2x\breve{}q$ es divisible por $(x - 1)$ y $(x + 1)$, respectivamente, determine los valores de las constantes p y q.
Solución: $p = 2, \quad q = 1$.

Problema 11.14 En la división de polinomio se aplicó el método de la división sintética y se planteó el siguiente esquema:

4	-3	$-b$	a	$2a^2$
$\downarrow$	$8a$	c	m	
4	b	d	n	

Determine el valor del resto n.
Solución: $n = 11$

Problema 11.15 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si la división $(6x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 10x + a) : (3x^2 + 2x + b)$ es exacta. Encuentre el valor de $a^2 + b^2$.
Solución: 650

Problema 11.16 Encuentre las raíces enteras de $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6$ y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}$.
Solución: $x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad p(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

Problema 11.17 Encuentre las raíces de $p(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 14x - 21$, sabiendo que $x_1 = -1 - i\sqrt{2}$ es una raíz de $p(x)$.
Solución: $x_2 = -1 + i\sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{7}, \quad x_4 = -\sqrt{7}$.

Bibliografía

Attwood, G. and Barraclough, J. (2017). Core Pure Mathematics Book 1. Pearson Education.
Ayres, F. (2003). Álgebra Moderna. McGraw-Hill-Interamericana Editores.
Bucchi, P. (1998). Curso práctico de Matemática. (Vol. 1). Editorial Moderna.
Kumar, V. (2020). Comprehensive Algebra I. McGraw Hill Education.
Lehmann, C.H. (1989). Geometría Analítica. (Decimotercera edición). Editores Limusa.
Lipchutz, S. (1969). Teoría de conjuntos y temas afines. (Segunda edición). McGraw-Hill-Interamericana Editores.
Mendelson, E. (1997). Introduction to Mathematical Logic. (Fourth edition). Chapman and Hall.
Mishra, S. (2016). Fundamentals of Mathematics Algebra I. Pearson Indian.
Murti, G. and Swamy, U. (2018). Problems in Mathematics. (Vol. I, Series Maestro). John Wyley and Sons.
Sullivan, M. (2012). Álgebra y Trigonometría. (Novena Edición). Editorial Prentice Hall.
Tewani, G. (2018). Mathematics for Joint Entrance Examination. Cengage Learning.
Waner, S. y Costenoble, S. (2007). Finite Mathematics and Applied Calculus. (Fourth edition). Thomson Brooks/Cole.
Zill, D. y Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. (Tercera edición). McGraw-Hill-Interamericana Editores.

Imagenes

Las imagenes utilizadas en las portadas de cada capítulo fueron diseñadas por freepix y se encuentran disponibles en el banco de imagenes: www.freepik.es

Acerca del autor

Luis Hernández Molina es egresado de la Universidad de Tarapacá (UTA), donde obtuvo el título de profesor de estado en Matemática, es Magíster en Docencia Universitaria de Universidad de Las Américas (UDLA) y Diplomado en Educación Matemática en el Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile. En el transcurso de su carrera ha sido profesor de Matemática de la Universidad de Santiago, Universidad Mayor, Universidad Diego Portales, Universidad Tecnológica Metropolitana y Universidad del Desarrollo. Desde 2005 es profesor en el Instituto de Matemática, Física y Estadística (IMFE) de la Facultad de Ingeniería y Negocios de UDLA y actualmente se desempeña como coordinador académico en el área de Educación Matemática.

Fe de erratas

Estimado lector, si ha encontrado un error matemático en este libro y desea proporcionar comentarios para mejorar su contenido en futuras ediciones, sugiero que escriba al correo electrónico indicado (lhernandez@udla.cl) para comunicar su observación al autor del libro. Proporcionar comentarios constructivos sobre errores o posibles mejoras es una forma valiosa de contribuir al proceso de mejorar y corregir cualquier publicación.

Luis Hernández

UDLA
UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS